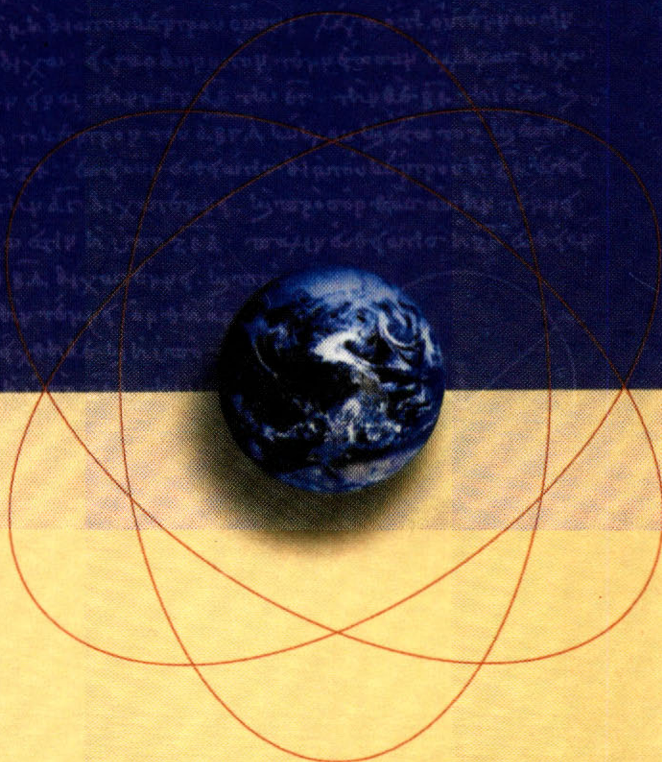
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΙΣΤΟΡΙΑ Των Επιστημών και της Τεχνολογίας

Γ' Τάξη Γενικού Λυκείου



ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Στοιχεία από την ιστορία των Μαθηματικών, της Αστρονομίας, της Φυσικής, της Χημείας και της Τεχνολογίας

Γ΄ ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Συγγραφείς

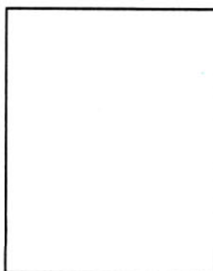
Θεόδωρος Αραμπατζής, λέκτορας Πανεπιστημίου Αθηνών
Κώστας Γαβρόγλου, καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Δημήτρης Διαλέτης, καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Γιάννης Χριστιανίδης, λέκτορας Πανεπιστημίου Αθηνών
Νίκος Κανδεράκης, καθηγητής Β/βάθμιας Εκπαίδευσης
Στέλιος Βερνίκος, καθηγητής Β/βάθμιας Εκπαίδευσης

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ - ΑΘΗΝΑ 1999

Εποπτεία στο Πλαίσιο του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου:
Δημήτριος Καραγεώργος, σύμβουλος Π.Ι.
Γλωσσική Επιμέλεια: **Ασημίνα Αναγνωστοπούλου**
Κριτές: **Ευγενία Κολέζα**,
Επίκουρος Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Μαρία Χιονίδου,
Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΙ
ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΕΚΔΟΣΗ 2010 - ΑΝΤΙΤΥΠΑ 6.000 - ΑΡ. ΣΥΜΒΑΣΗΣ 28/17-2-10

ΕΚΤΥΠΩΣΗ: ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α.Ε. - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΑΦΟΙ ΧΑΛΑ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΤΙΚΗ Ο.Ε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 Η ΦΥΣΙΚΗ ΤΟ 19ο ΚΑΙ ΤΟΝ 20ό ΑΙΩΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 Η ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΤΟ 19ο ΚΑΙ ΤΟΝ 20ό ΑΙΩΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όλοι έχουμε ακούσει κάτι από την ιστορία της επιστήμης. Για παράδειγμα, όλοι έχουμε ακούσει πως ο Αρχιμήδης βγήκε από το λουτρό και έτρεχε στους δρόμους των Συρακουσών φωνάζοντας «Εύρηκα», πως ο Γαλιλαίος, αφού ομολόγησε μπροστά στην Ιερά Εξέταση ότι δεν πιστεύει στην κίνηση της γης, σιγοψιθύρισε «Κι όμως κινείται», πως ο Νεύτων ανακάλυψε το νόμο της παγκόσμιας έλξης, όταν είδε να πέφτει ένα μήλο, πως ο Αϊνστάιν δεν πέτυχε στις εισαγωγικές εξετάσεις για το πανεπιστήμιο κτλ. Και όμως, τίποτα από τα παραπάνω δεν ανταποκρίνεται στην αλήθεια! Αλλά ακόμα κι αν ανταποκρινόταν, τέτοιου τύπου ανεκδοτολογικές αναφορές στη ζωή των μεγάλων επιστημόνων δεν είναι ιστορία της επιστήμης.

Η ιστορία της επιστήμης είναι η ιστορία των ανθρώπων που προσπαθούν να κατανοήσουν τη φύση (έμβια και μη), και στην προσπάθειά τους αυτή διατυπώνουν νέες έννοιες και νέους συλλογισμούς, χρησιμοποιούν τα κατάλληλα εργαλεία της λογικής και των μαθηματικών, αναπτύσσουν τεχνικές μέτρησης και παρατήρησης, διαμορφώνουν νέες θεωρίες, επινοούν νέες υπολογιστικές μεθόδους και προτείνουν νέα πειράματα. Βεβαίως, με τα σημερινά κριτήρια και με τις σύγχρονες γνώσεις θα λέγαμε ότι σχεδόν όλες αυτές οι προσπάθειες οδήγησαν στο παρελθόν σε λανθασμένες ή ατελείς θεωρίες!

«Τότε, όμως,» - μπορεί να ρωτήσει κάποιος - «τι νόημα έχει να αφιερώνουμε ένα ολόκληρο μάθημα στο πρόγραμμα του Ενιαίου Λυκείου, για μάθουμε την ιστορία λανθασμένων θεωριών, μεθόδων και τεχνικών;». Πιστεύουμε πως έχει μεγάλη σημασία να μελετήσουμε τις προσπάθειες που έγιναν στο παρελθόν για την κατανόηση της φύσης, για να καταλάβουμε τι ακριβώς πίστευαν οι άνθρωποι σε κάθε εποχή, ασχέτως εάν αυτά που πίστευαν θεωρούνται για εμάς σήμερα σωστά ή λανθασμένα. Στις σελίδες του βιβλίου «Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας» θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι η κατανόηση μιας εποχής που έχει περάσει παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, όταν γίνεται όχι με βάση τις δικές μας, τις σημερινές αξίες και αλήθειες, αλλά με βάση τις αξίες και τις δυνατότητες που είχαν οι άνθρωποι την εποχή εκείνη.

Πρωταγωνιστές, ωστόσο, στην ιστορία της επιστήμης, δεν είναι μόνο οι ιδέες αλλά κυρίως οι άνθρωποι με τις αδυναμίες και τις αντιφάσεις τους, με το πείσμα και την απόλυτη αφοσίωσή τους σε αυτό που κάνουν, με τη μικροψυχία αλλά και με τη μεγαλοψυχία τους, με τον εγωισμό τους αλλά και με την ανιδιοτέλειά τους αυτοί που με τις μεγαλειώδεις συλλήψεις τους μας βοήθησαν να κατανοήσουμε καλύτερα το φυσικό κόσμο μέσα στον οποίο ζούμε, το σώμα μας αλλά και τα άλλα έμβια όντα.

Υποστηρίζουμε ότι μελετάμε την ιστορία των ανθρώπων που προσπάθησαν να κατανοήσουν τη φύση και όχι απλώς την ιστορία των ιδεών τους. Τις ιδέες τις παράγουν οι άνθρωποι μέσα από πολύμορφες και πολύπλοκες διαδικασίες, όπως είναι η συστηματική παρατήρηση της φύσης και ο στοχασμός, η μελέτη της γνώσης που έχουν κληροδοτήσει οι προηγούμενες γενιές, η κριτική, η διδασκαλία, η συστηματική έρευνα, οι συζητήσεις και πολλές φορές οι διαμάχες, η επίλυση πρακτικών προβλημάτων, η κατασκευή οργάνων ή μηχανών, η τιθάσευση και η εκμετάλλευση της φύσης αλλά και οι πόλεμοι, οι σχέσεις τους με την εξουσία, με τους χορηγούς κτλ.

Έτσι, οι διανοητικές διεργασίες που απαιτούνται για τις επιστημονικές κατακτήσεις δεν είναι δυνατόν να μελετηθούν χωρίς να ληφθεί υπόψη η καθημερινή πρακτική των επιστημόνων, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο αυτοί ζουν και λειτουργούν σε μια κοινωνία.

Οι επιστημονικές θεωρίες, λοιπόν, είναι αποτέλεσμα διανοητικών αλλά και κοινωνικών διεργασιών. Στον καθορισμό των θεωριών ορισμένες φορές υπερισχύουν οι διανοητικές διεργασίες, άλλες φορές πάλι οι κοινωνικοί παράγοντες. Συνήθως, όμως, η διαμόρφωση των ιδεών σχετικά με τη φύση είναι αποτέλεσμα της συνεχούς αλληλεπίδρασης των διανοητικών και των κοινωνικών διεργασιών.

Με το βιβλίο «Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας» θέλουμε να γνωρίσουν οι μαθητές κάποια σημαντικά γεγονότα, που έχουν σχέση με την ιστορία της επιστήμης. Παράλληλα, όμως, θέλουμε να αναδείξουμε και ορισμένες από τις θέσεις εκείνες με τις οποίες συμφωνούν σήμερα οι περισσότεροι ιστορικοί της επιστήμης. Δηλαδή:

- *ότι πολλά πράγματα σχετικά με τη φύση μπορούν να γίνουν κατανοητά με την απλή παρατήρηση, που δεν απαιτεί περίπλοκα όργανα,*
- *ότι η σχέση ανάμεσα στη θρησκεία και την επιστήμη είναι εξαιρετικά σύνθετη και, επομένως, δεν είναι δυνατόν να κατανοηθεί μέσα από δίπολα του τύπου «συντηρητική θρησκεία - προοδευτική επιστήμη»,*
- *ότι ο Μεσαίωνας δεν υπήρξε η «σκοτεινή» περίοδος της ιστορίας, όπως χαρακτηριζόταν παλαιότερα,*
- *ότι η σχολαστική παράδοση του Μεσαίωνα δεν υπονόμευε την επιστήμη,*
- *ότι η συνεισφορά των Αράβων και του Ισλάμ στην αναγέννηση της επιστημονικής σκέψης στην Ευρώπη ήταν εξαιρετικά σημαντική,*
- *ότι οι «ψευδο-επιστήμες» - όπως μερικές φορές χαρακτηρίζονται η αλχημεία, η μαγεία, η αστρολογία κτλ.- από τη μια πλευρά, και ο ορθολογισμός από την άλλη*

έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της επιστήμης,

- *ότι δεν υπάρχουν «συνταγές» για το πώς αναπτύσσεται η επιστήμη, η οποία συνεχίζει την πορεία της άλλοτε συσσωρεύοντας γνώσεις και άλλοτε δημιουργώντας ρήξεις με τις καθιερωμένες αντιλήψεις,*

- *ότι η επιστημονική σκέψη, όπως τη γνωρίζουμε σήμερα, έκανε πολλά χρόνια να αποδεσμευτεί από τη φιλοσοφία,*

- *ότι σε κάθε περίοδο υπάρχουν συγκεκριμένες σχέσεις ανάμεσα στις ιδέες για το πώς είναι και πώς λειτουργεί η φύση από τη μία πλευρά και την πρακτική εφαρμογή αυτών των ιδεών για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων από την άλλη, και τέλος,*

- *ότι η γνώση της φιλοσοφίας των επιστημών (κριτήρια αλήθειας για την αποδοχή των θεωριών, εξηγητικό σχήμα, σχέση θεωρίας-πειράματος κτλ.) συμβάλλει σημαντικά στην κατανόηση της ιστορίας τους.*

Δύο περίοδοι από την ιστορία της επιστήμης έχουν προσελκύσει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον των ειδικών, οι οποίοι έγραψαν εξαιρετικά σημαντικές μελέτες γι' αυτές: η ελληνική αρχαιότητα και η περίοδος που είναι γνωστή ως Επιστημονική Επανάσταση (16ος και 17ος αιώνας). Στη διάρκεια της Επιστημονικής Επανάστασης διαμορφώθηκαν οι θεωρίες και οι κανόνες της σύγχρονης επιστήμης από ανθρώπους, όπως ο Κοπέρνικος, ο Γαλιλαίος, ο Καρτέσιος, ο Κέπλερ, ο Νεύτων κ.ά., και η επιστήμη άρχισε βαθμιαία να αυτονομείται από τη φιλοσοφία. Τα έργα, όμως, αυτών των μεγάλων επιστημόνων δε δημιουργήθηκαν εκ του μηδενός. Βασίστηκαν στην κληρονομιά του παρελθόντος, στα έργα των Αρχαίων Ελλήνων στοχαστών, του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη, του Πτολεμαίου κ.ά., και ταυτόχρονα έφεραν τη ρήξη με την κληρονομιά αυτή. Γι' αυτό το λόγο δίνουμε ειδικό βάρος στη μελέτη αυτών των δύο περιόδων, πιστεύοντας πως πολλά από τα θέματα που απαριθμήσαμε παραπάνω είναι δυνατόν να συζητηθούν με αρκετή σαφήνεια με τα παραδείγματα που μας παρέχουν.

Που βασιζόμαστε, για να μελετήσουμε της ιστορία των επιστημών; Πρώτα στις ιστορικές πηγές, στα τεκμήρια που έχουν αφήσει οι επιστήμονες: στο δημοσιευμένο έργο, στις σημειώσεις, στα χειρόγραφα, στις μαρτυρίες συνεργατών, στην αλληλογραφία τους κτλ. Αλλά πέρα απ' αυτές η ιστορία των επιστημών έχει αναπτύξει ένα σύνολο μεθοδολογιών και τεχνικών, οι οποίες - με βάση την ενδελεχή μελέτη των ιστορικών πηγών - μας επιτρέπουν να δώσουμε απαντήσεις όχι μόνο στο ερώτημα πώς έγιναν τα πράγματα αλλά και στο ερώτημα γιατί έγιναν έτσι. Με άλλα λόγια,

«ιστορία της επιστήμης» δεν είναι μόνο η αφήγηση αλλά και η ερμηνεία των γεγονότων.

Η γνώση των πηγών, φυσικά, δε σημαίνει στείρα απομνημόνευση. Δεν είναι απαραίτητο ο μαθητής να επικεντρώνει την προσοχή του αποκλειστικά στα γεγονότα και στις χρονολογίες. Αυτό που μας ενδιαφέρει δεν είναι να απομνημονεύσει όλες τις χρονολογίες που θα συναντήσει στην αφήγηση που ακολουθεί, αλλά, κυρίως, να συγκρατήσει τη χρονική σειρά των πιο σημαντικών γεγονότων.

Ένα εισαγωγικό βιβλίο, όπως αυτό, δεν μπορεί να περιλαμβάνει όλα τα θέματα που αφορούν την ιστορία των επιστημών· γι' αυτό επιλέξαμε να δώσουμε έμφαση σε ορισμένα μόνο επεισόδια και να παραλείψουμε άλλα.

Όπως θα διαπιστώσει ο αναγνώστης, δίνουμε έμφαση στην ιστορία της φυσικής, της αστρονομίας και των μαθηματικών. Αλλά ιστορία της επιστήμης δεν είναι μόνο η ιστορία των τριών αυτών επιστημών. Είναι επίσης η ιστορία της αλχημείας και της χημείας, η ιστορία της βιολογίας, της ιατρικής, της φαρμακευτικής, της γεωλογίας, ακόμα και της τεχνολογίας. Εμείς επιλέξαμε εκείνες τις γνωστικές περιοχές που αναδεικνύουν αυτές τις πλευρές της ιστορίας των επιστημών, οι οποίες θεωρούνται σημαντικές και ταυτόχρονα εμπεριέχουν αρκετά από τα «γνωστά περιστατικά». Οι λόγοι που μας οδήγησαν να επιλέξουμε στην αφήγησή μας της ιστορία της φυσικής, της αστρονομίας και των μαθηματικών είναι οι εξής: πρώτο, για τα θέματα αυτά έχει γραφτεί ο μεγαλύτερος όγκος των καθιερωμένων βιβλίων του κλάδου, έχουν γίνει οι περισσότερες συζητήσεις και, επομένως, υπάρχει σύγκλιση απόψεων ανάμεσα στους ιστορικούς της επιστήμης σχετικά με τη σημασία ορισμένων γεγονότων και προσώπων· δεύτερο, οι μαθητές στους οποίους απευθύνεται το βιβλίο έχουν τις απαιτούμενες τεχνικές γνώσεις (γεωμετρία και κλασική φυσική), ώστε είναι σε θέση να παρακολουθήσουν επιχειρήματα με τεχνικό περιεχόμενο καλύτερα από επιχειρήματα άλλων γνωστικών πεδίων· τρίτο, υπάρχουν πολλά βοηθήματα (κυρίως ξένα βιβλία μεταφρασμένα στα ελληνικά), που αναφέρονται σ' αυτά τα θέματα.

Άλλοι συγγραφείς θα επέλεγαν να παρουσιάσουν, ενδεχομένως, άλλα θέματα· θα έδιναν, ίσως, έμφαση σε διαφορετικά γεγονότα. Με τη νέα ρύθμιση σε ό,τι αφορά τα σχολικά βιβλία, θα υπάρχουν στο μέλλον τρία βιβλία για κάθε μάθημα και οι σύλλογοι των καθηγητών σε κάθε περιφέρεια θα επιλέγουν όποιο από τα τρία κρίνουν ως πιο κατάλληλο. Άρα και η Ιστορία των επιστημών θα έχει την τύχη να αποτελέσει πεδίο συζήτησης και, γιατί όχι, αντιπαράθεσης ανάμεσα σε διαφορετικές προσεγγίσεις.

Ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι ο τρόπος παρουσίασης του γνωστικού αντικειμένου που ακολουθήσαμε στο βιβλίο δεν είναι παντού ο ίδιος. Για τη χρονική περίοδο από την αρχαιότητα έως τα τέλη του 17ου αιώνα ακολουθήσαμε την - αναπό-

φευκτα περιληπτική - εξιστόρηση με χρονολογική σειρά των εξελίξεων στις φυσικές επιστήμες και στα μαθηματικά. Στο υπόλοιπο τμήμα του βιβλίου επιλέξαμε και εκθέσαμε συνοπτικά κάποια καθοριστικά επεισόδια από την ιστορία των φυσικών επιστημών χωρίς να επιχειρήσουμε μια συνολική αφήγηση της πορείας τους κατά το 18ο, το 19ο και τον 20ο αιώνα. Αυτή η έλλειψη ομοιομορφίας στην παρουσίαση του υλικού σχετίζεται με τις τεχνικές δυσκολίες που αυτό παρουσιάζει για τους μαθητές του Λυκείου, οι γνώσεις των οποίων δεν επαρκούν για να μπορέσουν αυτοί να παρακολουθήσουν έστω και κάποιες από τις σχετικές συζητήσεις. Αυτό το πρόβλημα γίνεται ακόμα πιο έντονο, όταν αναφερόμαστε στον 20ό αιώνα. Στις αρχές του 20ού αιώνα αναπτύχθηκε η ειδική θεωρία της σχετικότητας, η γενική θεωρία της σχετικότητας και της κβαντικής μηχανικής. Οι θεωρίες αυτές ανέτρεψαν ουσιαστικά τον τρόπο με τον οποίο κατανοούσαμε τη φύση στο πλαίσιο που είχε θέσει η Επιστημονική Επανάσταση του 16ου και, κυρίως, του 17ου αιώνα. Για να κατανοήσουμε, επομένως, τα ιστορικά και τα φιλοσοφικά προβλήματα που τέθηκαν με αυτές τις θεωρίες, θα πρέπει να γνωρίζουμε κάποια χαρακτηριστικά τους. Ένα διδακτικό εγχειρίδιο ιστορίας των επιστημών δεν είναι δυνατόν να «διδάξει» αυτές τις θεωρίες προκειμένου να γίνει έτσι δυνατή η συζήτηση των ιστορικών και των φιλοσοφικών ζητημάτων που αναφύονται, γιατί τότε θα κινδύνευε να χαρακτηριστεί εκλαϊκευτικό.

Η Ιστορία της Επιστήμης και της Τεχνολογίας αποκτά σήμερα ολοένα και μεγαλύτερη σημασία για τη διδασκαλία και την έρευνα. Στο διεθνή χώρο τα τελευταία είκοσι χρόνια έχουν ιδρυθεί μεγάλα ινστιτούτα, πολλά πανεπιστημιακά τμήματα, ενώ έχει αυξηθεί εντυπωσιακά ο αριθμός των επιστημόνων που ασχολούνται επαγγελματικά με αυτά τα θέματα και ο αριθμός των σχετικών βιβλίων που έχουν εκδοθεί. Τελευταία, μαθήματα ιστορίας της επιστήμης άρχισαν να εντάσσονται στα σχολικά προγράμματα και η Ελλάδα είναι μία από τις χώρες που πρωτοπορούν στον τομέα αυτό.

Οι μαθητές που θα φοιτήσουν στη Γ΄ Λυκείου το σχολικό έτος 1999-2000 θα είναι οι πρώτοι που θα διδαχτούν αυτό το μάθημα. Οι παρατηρήσεις τους θα βοηθήσουν στην εντόπιση των πιθανών αδυναμιών του βιβλίου και επομένως στη βελτίωσή του. Κάθε σχολικό βιβλίο θα πρέπει συνεχώς να βελτιώνεται, να προσαρμόζεται σε νέα δεδομένα, να ανταποκρίνεται στις ανάγκες των μαθητών (προφανώς, και των καθηγητών), να λαμβάνει υπόψη τις διάφορες παρατηρήσεις και κριτικές, ώστε να γίνει ζωντανό στοιχείο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Γι' αυτό το λόγο αποφασίσαμε να ανοίξουμε ένα συνεχή δίαυλο επικοινωνίας με τους μαθητές, που θα μπορούν να στέλνουν ηλεκτρονικά (με e-mail) τα μηνύματά τους στη διεύθυνση **hst@pi-schools.gr** *με τις παρατηρήσεις, τις προτάσεις τους για βελτιώσεις, τις*

σκέψεις τους για συγκεκριμένα επεισόδια που συζητάμε και, βέβαια, τα σχόλιά τους για τα κεφάλαια ή τις ενότητες που βρήκαν ελκυστικά και ενδιαφέροντα. Εμείς υποσχόμαστε πως θα απαντάμε εντός μίας εβδομάδας μετά τη λήψη κάθε μηνύματος, αρκεί βέβαια το μήνυμα να συνοδεύεται από το όνομα και από τα στοιχεία του μαθητή.

Η πολύχρονη πείρα μας σχετικά με τα εκπαιδευτικά θέματα μας έχει πείσει πως τα βιβλία δεν χωρίζονται σε εύκολα και σε δύσκολα, αλλά σε ενδιαφέροντα και σε βαρετά. Ελπίζουμε οι περισσότεροι μαθητές να το βρουν πολύ ενδιαφέρον, άλλοι να βρουν μέσα σ' αυτό ορισμένα ενδιαφέροντα θέματα, και οι υπόλοιποι απλώς να το βρουν ίσως βαρετό.

Η «Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας» είναι αποτέλεσμα μιας συλλογικής προσπάθειας, στην οποία ο καθένας από εμάς είχε το δικό του συγκεκριμένο και ουσιαστικό ρόλο: άλλος έχοντας τη βασική ευθύνη της επιλογής και της συγγραφής των θεμάτων, άλλος προσαρμόζοντας το υλικό στις διδακτικές απαιτήσεις ενός εγχειριδίου που προορίζεται για τη Γ΄ Λυκείου. Το τελικό κείμενο πιστεύουμε ότι αντανακλά αυτή τη δημιουργική συνεργασία.

Σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής του βιβλίου, οι τέσσερις από εμάς που διδάσκουμε στο Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης του Πανεπιστημίου Αθηνών αισθανθήκαμε πόσο δυσαναπλήρωτο είναι το κενό που μας άφησε η απουσία του ΓΙΩΡΓΟΥ ΓΚΟΥΝΤΑΡΟΥΛΗ (1945-1996), καθηγητή ιστορίας και φιλοσοφίας των επιστημών, αρχικά στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης και στη συνέχεια στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Ο Γ. ΓΚΟΥΝΤΑΡΟΥΛΗΣ είχε πάθος με τη διδασκαλία και μας έμαθε πολλά μέσα από το εκπαιδευτικό και ερευνητικό έργο του. Για ένα είμαστε απόλυτα βέβαιοι: ότι αυτό το βιβλίο θα ήταν πολύ καλύτερο, αν βρισκόταν σήμερα μαζί μας. Ως ελάχιστο χρέος τιμής για τις προσπάθειες που κατέβαλε για την εδραίωση της Ιστορίας της Επιστήμης στη χώρα μας, το αφιερώνουμε στη μνήμη του.

Αθήνα, Δεκέμβριος 1998 *Οι συγγραφείς*

Μέρος Πρώτο: Η Αρχαία και Μεσαιωνική Επιστήμη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΟΥΣ ΑΡΧΑΙΟΥΣ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟΥΣ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥΣ

1 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ ΣΤΗ ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑ

Η μελέτη της ιστορίας της αρχαίας Μεσοποταμίας, έγραψε πρόσφατα ένας συγγραφέας, μοιάζει με ένα μακρινό και ασυνήθιστο ταξίδι όπου, ώσπου να φτάσουμε στον προορισμό μας, δεν είμαστε σίγουροι αν βρισκόμαστε στο σωστό δρόμο. Οι λιγοστές πληροφορίες που ακολουθούν έχουν σκοπό να μας προσανατολίσουν στο σύντομο ταξίδι που θα κάνουμε στην ιστορία της επιστήμης που αναπτύχθηκε εδώ και τέσσερις χιλιάδες χρόνια στη χώρα αυτή που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο ποταμούς, τον Τίγρη και τον Ευφράτη, και καλύπτει μεγάλη περιοχή του σημερινού Ιράκ.

Οι λαοί που κατοικούσαν στην ευρύτερη περιοχή της Μεσοποταμίας από την τέταρτη π.Χ. χιλιετία και μετά χωρίζονται από τους αρχαιολόγους σε δύο ομάδες, στους λαούς «μη σημιτικής καταγωγής» (που ονομάζονται και «ασιανίτες») και στους λαούς «σημιτικής καταγωγής». Γύρω στο 3500 π.Χ. συναντάμε στη νότια Μεσοποτάμια χώρα (στα παράλια του Περσικού Κόλπου και στις όχθες του Ευφράτη) εγκατεστημένους τους **Σουμέριους**, λαό μη σημιτικής καταγωγής, οι οποίοι είχαν συγκροτήσει μικρές πόλεις-κράτη. Οι Σουμέριοι ήταν μια από τις πιο αξιόλογες πολιτιστικές ομάδες που γνώρισε ποτέ η ιστορία. Εφηύραν τον τροχό, χρησιμοποίησαν πρώτοι πλίνθους για την κατασκευή μνημειακών κτιρίων, βρήκαν τρόπο να φτιάχνουν βούτυρο από το γάλα, κατασκεύασαν μεγάλα παλάτια και ιδιότυπους ναούς, τα περίφημα ζιγκουράτ (σαν τον πύργο της Βαβέλ, που αναφέρει η Παλαιά Διαθήκη). **Δύο από τα πιο σημαντικά επιτεύγματά τους ήταν η επινόηση της σφηνοειδούς γραφής και ενός αριθμητικού συστήματος, το οποίο από τα τέλη της τρίτης π.Χ. χιλιετίας εξελίχθηκε σε ένα εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης**.

Κατά την περίοδο 2350-2200 π.Χ. το σουμεριακό πολιτισμό προσοικειώθηκαν οι σημίτες Ακκάδιοι, που κατοικούσαν πολύ πιο βόρεια. Με την πάροδο του χρόνου οι

> Η ΑΠΟΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΗΣΗ
>
> Η σφηνοειδής γραφή των Σουμερίων αποκρυπτογραφήθηκε στα μέσα του περασμένου αιώνα, χάρη στις προσπάθειες του 27χρονου Γερμανού βοηθού δασκάλου από το Γκέτιγκεν G.F. Grotefend (Γκρότεφεντ, 1775-1853), και του Άγγλου ταγματάρχη H.C. Rawlinson (Ρώλινσον, 1810-1895)· όμως τα σφηνοειδή μαθηματικά και αστρονομικά κείμενα άρχισαν να μελετώνται σοβαρά, να αποκρυπτογραφούνται και να ερμηνεύονται μόλις στα τέλη της δεκαετίας 1920/30 χάρη, κυρίως, στις ακαταπόνητες προσπάθειες του Αυστριακού Otto Neugebauer (O. Νόυγκεμπαουερ, 1899-1990), κορυφαίου ερευνητή της επιστήμης της Μεσοποταμίας.

σημίτες κυριαρχούσαν όλο και περισσότερο και από τις αρχές της δεύτερης π.Χ. χιλιετίας το σουμεριακό και το ακκαδικό στοιχείο συγχωνεύθηκαν επιτυχώς στο πλαίσιο της **Πρώτης Βαβυλωνιακής Δυναστείας** (1900-1600 π.Χ.). Ο πιο γνωστός εκπρόσωπος της Δυναστείας αυτής, ο μεγάλος νομοθέτης και κυβερνήτης Χαμουραμπί (περ. 1792-1750 π.Χ.), μπορούσε πια να αποκαλεί τον εαυτό του «Βασιλέα του Σούμερ και του Ακκάδ«. Η περίοδος της Δυναστείας του Χαμουραμπί ήταν μια περίοδος ευημερίας και πολιτισμικής άνθησης και τα περισσότερα από τα μαθηματικά κείμενα του πολιτισμού της Μεσοποταμίας που έχουμε στη διάθεσή μας χρονολογούνται από αυτήν ακριβώς την περίοδο. Πρωτεύουσα της Πρώτης Βαβυλωνιακής Δυναστείας ήταν η Βαβυλώνα και για το λόγο αυτό ολόκληρος ο πολιτισμός της Μεσοποταμίας αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως βαβυλωνιακός πολιτισμός.

Τα αρχαιότερα γραπτά τεκμήρια από την περιοχή χρονολογούνται περίπου από το 3500 π.Χ. και καταγράφονται σε όλη την περίοδο ως το 539 π.Χ., όταν ο Πέρσης βασιλιάς Κύρος υπέταξε όλη την περιοχή στην περσική κυριαρχία και η Μεσοποταμία έπαψε πια να υφίσταται ως ανεξάρτητη οντότητα. Η κατάκτηση της χώρας από τους Πέρσες και, δύο αιώνες αργότερα, από το Μέγα Αλέξανδρο, είχε ως αποτέλεσμα η ιστορία της Μεσοποταμίας από τον 5ο π.Χ. αι. και μετά να μη μπορεί να διαχωριστεί από την ιστορία άλλων χωρών, κυρίως της Περσίας και της Ελλάδας.

1.1 Το βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα

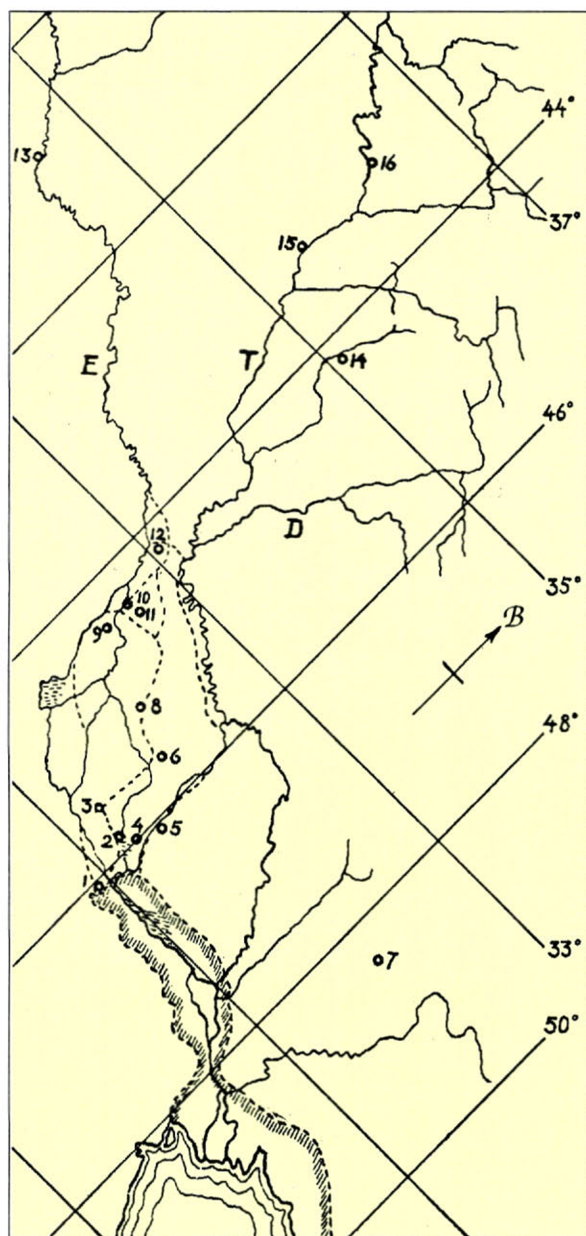
Είπαμε ότι το αριθμητικό σύστημα των Βαβυλωνίων αναπτύχθηκε γύρω στο 2000 π.Χ. Όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια, ήταν ένα μη ψηφιακό εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα, στο οποίο χρησιμοποιούνταν δύο σύμβολα: η απλή κατακόρυφη σφήνα (𒁹), που παριστάνει τη μονάδα, και η διπλή σφήνα (𒌋), που παριστάνει τη δεκάδα. Και τα δύο σύμβολα σχηματίζονταν πιέζοντας μια αιχμηρή γραφίδα σε μια πήλινη πινακίδα. Οι αριθμοί μέχρι το 59 γράφονταν με επανάληψη αυτών των δύο

συμβόλων. Ο αριθμός 35, για παράδειγμα, γραφόταν με τη βοήθεια τριών συμβόλων του δέκα και πέντε συμβόλων της μονάδας (όπως στα γνωστά μας ρωμαϊκά αριθμητικά σημεία). Σε όλα αυτά δεν υπάρχει τίποτα το εξαιρετικό. Τώρα, όμως, εμφανίζεται το σημαντικό γεγονός: ο αριθμός 60 παριστάνεται και πάλι με το σύμβολο της μονάδας, δηλαδή με την απλή κατακόρυφη σφήνα, ενώ το ίδιο ισχύει για κάθε θετική ή αρνητική δύναμη του 60. Έτσι, το σύμβολο για το 1 μπορεί να σημαίνει $1 \cdot 60^0 = 1$ ή $1 \cdot 60^1 = 60$ ή $1 \cdot 60^2 = 3600$ ή, γενικά, οποιαδήποτε θετική ή αρνητική δύναμη του 60. Το ίδιο ισχύει για κάθε αριθμό από το 1 ως το 59. Η τιμή, επομένως, ενός αριθμητικού συμβόλου δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Αλλά τότε, από τι εξαρτάται η τιμή ενός συμβόλου; Εδώ ακριβώς βρίσκεται η πρωτοτυπία του βαβυλωνιακού αριθμητικού συστήματος: η τιμή κάθε συμβόλου εξαρτάται από τη θέση του μέσα στη σημειογραφία του εκάστοτε αριθμού· το σύστημα δηλαδή είναι **θεσιακό**. Διέπεται από την ίδια βασική αρχή που ισχύει στο σημερινό αριθμητικό σύστημα όπου, λ.χ., στον αριθμό 1955, το πρώτο ψηφίο «5», λόγω της θέσης του στη σημειογραφία του αριθμού, έχει δεκαπλάσια τιμή ($5 \cdot 10^1 = 50$) από το δεύτερο «5» ($5 \cdot 10^0 = 5$). Αυτή ακριβώς η αρχή ισχύει και στο βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα, με τη διαφορά ότι, επειδή είναι εξηκονταδικό και όχι δεκαδικό, οι διαδοχικές «θέσεις» δηλώνουν τις διαδοχικές δυνάμεις του 60 και όχι του 10.

Ο συστηματικός θεσιακός συμβολισμός είχε τεράστια **πλεονεκτήματα** για την εκτέλεση των πράξεων. Ο Βαβυλώνιος των αρχών της δεύτερης π.Χ. χιλιετίας μπορούσε να εκτελεί με την ίδια ευκολία οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό στο εξηκονταδικό σύστημα, έχοντας στη διάθεσή του μόνο τους βασικούς πίνακες με τους πολλαπλασιασμούς από το $1 \cdot 1$ ως το $59 \cdot 59$ (όπως ακριβώς εμείς χρησιμοποιούμε τους πίνακες από το $1 \cdot 1$ ως το $9 \cdot 9$ - δηλαδή την «προπαίδεια»). Επίσης, με τους ίδιους πίνακες μπορούσε να πολλαπλασιάζει τα εξηκονταδικά κλάσματα σαν να ήταν ακέραιοι αριθμοί, όπως ακριβώς κι εμείς πολλαπλασιάζουμε τα δεκαδικά κλάσματα (δηλαδή τους δεκαδικούς αριθμούς) σαν να είναι ακέραιοι, θέτοντας στο τέλος την υποδιαστολή στην κατάλληλη θέση.

Το βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα είχε όμως και **μειονεκτήματα**, το πιο σημαντικό από τα οποία

> Ας δούμε το παράδειγμα του αριθμού <<<< |||<<| . Ο αριθμός αυτός αποτελείται από δύο μέρη: οι τέσσερις διπλές και οι τρεις απλές σφήνες στο αριστερό μέρος σχηματίζουν τον αριθμό 43, ενώ οι δύο διπλές και η μια απλή σφήνα στο δεξιό μέρος σχηματίζουν τον αριθμό 21. Ο αριθμός θα μπορούσε να γραφτεί 43,21. Όμως, οι 43 μονάδες του αριστερού τμήματος είναι ανώτερης τάξης σε σύγκριση με τις 21 μονάδες του δεξιού τμήματος. Ο αριθμός θα μπορούσε, λ.χ., να είναι ο $43 \cdot 60^1 + 21 \cdot 60^0 = 2601$ ή ο $43 \cdot 60^0 + 21 \cdot 60^{-1} = 2601/60$ ή, πιο γενικά, ο $43 \cdot 60^n + 21 \cdot 60^{n-1}$.



Χάρτης της Μεσοποταμίας.
Οι διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν την κοίτη των ποταμών και τα παράλια του Περσικού κόλπου στην αρχαιότητα. Οι αριθμοί δείχνουν τις θέσεις των σημαντικών πόλεων.

6	*Αντάμπ*
15	*Ασσούρ*
10	*Βαβυλώνα*
9	*Ντιλμπάτ*
D	*Ντιγιάλα ποταμός*
E	*Ευφράτης ποταμός*
11	*Κις*
5	*Λαγκάς*
2	*Λάρσα*
13	*Μαρί*
16	*Νινευή*
8	*Νίππουρ*
14	*Νουζί*
7	*Σούσα*
12	*Σιππάρ*
4	*Τελ Σιφρ*
T	*Τίγρης ποταμός*
1	*Ουρ*
3	*Ουρούκ*

ήταν η απουσία συμβόλου για το «μηδέν». Για να καταλάβουμε τη σημασία της έλλειψης αυτής ας σκεφτούμε πώς θα γράφαμε εμείς σήμερα, λ.χ., τον αριθμό «δέκα», αν δεν είχαμε το σύμβολο του «μηδενός»· θα τον γράφαμε όπως ακριβώς γράφουμε και τον αριθμό «ένα», με το σύμβολο «1», υπονοώντας όμως ότι το σύμβολο αυτό δηλώνει όχι μια απλή μονάδα ($1 \cdot 10^0 = 1$) αλλά μια μονάδα της αμέσως μεγαλύτερης τάξης ($1 \cdot 10^1 = 10$), δηλαδή μια δεκάδα. Με το ίδιο σύμβολο («1») θα γράφαμε επίσης

το εκατό, το χίλια και γενικά κάθε δύναμη του 10. Η απουσία συμβόλου για το «μηδέν», λοιπόν, προσέδιδε στο βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα μια έλλειψη σαφήνειας σε ό,τι αφορά την τάξη μεγέθους του κάθε αριθμού, η οποία έπρεπε να κατανοείται από τα συμφραζόμενα του εκάστοτε προβλήματος. Ένα άλλο μειονέκτημα του συστήματος ήταν η απουσία συμβόλου για την υποδιαστολή (ώστε να διακρίνονται οι ακέραιοι αριθμοί από τα κλάσματα).

Παρά τα μειονεκτήματά του, το βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα έδινε τη δυνατότητα να εκτελούνται οι αριθμητικές πράξεις με την ίδια σχεδόν ευκολία, όπως στη σημερινή αριθμητική. Για να απαλλαγούν όμως από το βάρος των μακροσκελών υπολογισμών, οι Βαβυλώνιοι γραφείς έκαναν εκτεταμένη χρήση πινάκων. Ο μεγαλύτερος αριθμός από τις πινακίδες μαθηματικού περιεχομένου που σώζονται περιέχουν ακριβώς τέτοια **κείμενα-πίνακες**. Οι πίνακες ήταν διαφόρων ειδών: πίνακες πολλαπλασιασμού, πίνακες αντιστρόφων (που χρησίμευαν για να εκτελούνται οι διαιρέσεις, καθώς το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης $m:n$ υπολογιζόταν ως $m \cdot \frac{1}{n}$), επίσης πίνακες τετραγώνων, κύβων, τετραγωνικών και κυβικών ριζών, ακόμη και πίνακες με τις τιμές παραστάσεων της μορφής $n^2 + n^3$ για διάφορες τιμές του n.

1.2 Η βαβυλωνιακή γεωμετρία

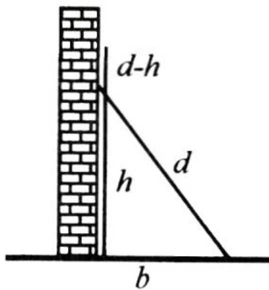
Η γεωμετρία των Βαβυλωνίων δεν ήταν αποδεικτική, όπως η γεωμετρία των Αρχαίων Ελλήνων, αλλά υπολογιστική. Το περιεχόμενό της ήταν οι υπολογισμοί εμβαδών και όγκων και οι μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα και σε τραπέζια. Σε ό,τι αφορά τα εμβαδά και τους όγκους, οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν καταρχάς να υπολογίζουν σωστά το εμβαδόν του ορθογωνίου, του ορθογωνίου τριγώνου και του τραπεζίου με μια πλευρά κάθετη προς τις παράλληλες βάσεις. Επίσης, υπολόγιζαν σωστά τους όγκους των πρισμάτων και των κυλίνδρων πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος, αν και για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου αρκούνταν, όπως θα λέγαμε σήμερα, τις περισσότερες φορές στην χονδροειδή προσέγγιση $\pi = 3$.

Σε ό,τι αφορά τις μετρικές σχέσεις το πιο σημαντικό επίτευγμα ήταν ο υπολογισμός των μηκών των πλευρών ορθογωνίων τριγώνων. Ένα από τα αρχαιότερα παραδείγματα υπολογισμού πλευρών ορθογωνίων τριγώνων φαίνεται ότι είναι αυτό που συναντούμε στην πινακίδα 85196 του Βρετανικού Μουσείου, που χρονολογείται από την εποχή της Πρώτης Βαβυλωνιακής Δυναστείας. Η διατύπωση είναι η εξής: *«Ένα δοκάρι με μήκος 0;30 [ακουμπά κατακόρυφα σε έναν τοίχο]. Το επάνω άκρο γλιστράει προς τα κάτω κατά 0;06. Πόσο απομακρύνεται το κάτω άκρο;»*

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα d = 0;30 (δηλ. $0 \cdot 60^0 + 30 \cdot 60^{-1} = 30/60 = 0{,}5$) και μια κάθετη πλευρά h = 0;30 - 0;06 = 0;24 (δηλ. $0 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} = 24/60 = 0{,}4$). Ζητείται η άλλη κάθετη πλευρά b, η οποία στο κεί-



Η βαβυλωνιακή πινακίδα "Plimpton 322". Χρονολογείται από την εποχή της Πρώτης Βαβυλωνιακής Δυναστείας (1900-1600 π.Χ.) και ανακαλύφθηκε σε ανασκαφές στο Senkereh. Γύρω στο 1923 την αγόρασε ο George Plimpton από έναν έμπορο στη Florida. Σήμερα φυλάσσεται στη συλλογή George A. Plimpton της Βιβλιοθήκης Σπανίων Βιβλίων και Χειρογράφων του Πανεπιστημίου της Columbia της Νέας Υόρκης. Η πινακίδα δεν διασώζεται ολόκληρη. Το υπάρχον τμήμα της, που φαίνεται στη φωτογραφία, είναι το δεξιό τμήμα μιας μεγαλύτερης αρχικά πινακίδας. Το αριστερό τμήμα έχει αποκοπεί, μάλλον μετά από την ανασκαφή. Οι διαστάσεις του σωζόμενου τμήματος είναι 13 x 9 εκ.



μενο υπολογίζεται σωστά, χρησιμοποιώντας τον «τύπο» $b = \sqrt{d^2-h^2}$ και βρίσκεται ίση με 0;18 (η τετραγωνική ρίζα βρισκόταν, φυσικά, από τους πίνακες). Προβλήματα παρόμοια με αυτό συναντάμε σε πολλά κείμενα της εποχής των Σελευκιδών, γεγονός που αποδεικνύει ότι οι Βαβυλώνιοι διατήρησαν την παράδοση των μετρικών σχέσεων σε ορθογώνια τρίγωνα για περισσότερο από 1500 χρόνια.

Ένα, επίσης, από τα πιο σημαντικά κείμενα των Μαθηματικών της Μεσοποταμίας είναι η πινακίδα Plimpton 322, (βλέπε φωτογραφία), η οποία:

α) Κατά μία άποψη, που υποστηρίζει ο O. Neugebauer, πιθανόν να χρησιμοποιούνταν για τον υπολογισμό πυθαγόρειων τριάδων.

β) Κατά τον καθηγητή Θ. Εξαρχάκο είναι πίνακας αντίστροφων αριθμών για τη λύση συστημάτων της μορφής $\left.\begin{matrix} \chi\cdot\psi=1 \\ \chi+\psi=\beta \end{matrix}\right\}$ και $\left.\begin{matrix} \chi\cdot\psi=1, \\ \chi-\psi=\beta \end{matrix}\right\}$ και το περιεχόμενό της δεν πιστοποιεί ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τις πυθαγόρειες τριάδες.

1.3 Η βαβυλωνιακή αστρονομία

Η ρύθμιση των αγροτικών εργασιών αλλά και λόγοι θρησκευτικοί, αστρολογικοί και ημερολογιακοί παρακίνησαν, ήδη από τις αρχές της δεύτερης π.Χ. χιλιετίας, το ενδιαφέρον των ιερέων της Μεσοποταμίας για την παρατήρηση του ουρανού. Μερικές από τις πρώτες προσπάθειές τους ήταν αφιερωμένες στη χαρτογράφηση του

ουρανού - στην αναγνώριση και στην ονομασία των πιο σημαντικών αστέρων, στην παρατήρηση των μεταξύ τους θέσεων και στη σύνδεση της εμφάνισής τους στον ουρανό με τις εποχές. Οι παρατηρήσεις τούς έδωσαν επίσης τη δυνατότητα να αναγνωρίσουν τους «επτά« πλανήτες (Ερμή, Αφροδίτη, Άρη, Δία, Κρόνο, καθώς και τον ήλιο και τη σελήνη, οι οποίοι θεωρούνταν και αυτοί πλανήτες, αφού μετατοπίζονται σε σχέση με τους απλανείς αστέρες), καθώς και τη στενή λωρίδα του ζωδιακού κύκλου, εντός της οποίας διενεργείται η κίνησή τους. Μέχρι τον 5ο π.Χ. αι. είχαν επίσης αναγνωρίσει τους αστερισμούς που χωρίζουν το ζωδιακό κύκλο σε δώδεκα τμήματα των 30^0 το καθένα (ζώδια).

Δε θα κάνουμε αναφορά στην αστρολογική πλευρά της βαβυλωνιακής αστρονομίας. Θα αρκεστούμε απλώς να σημειώσουμε πως οι αστρολογικές ανάγκες αποτέλεσαν σημαντικό κίνητρο για την ανάπτυξη ενός είδους **μαθηματικής αστρονομίας**, που έφθασε στη μέγιστη ακμή της τους τρεις τελευταίους π.Χ. αι., στην περίοδο των Σελευκιδών. Κύριο χαρακτηριστικό αυτής της αστρονομίας ήταν η χρησιμοποίηση αριθμητικών μοντέλων - αντίθετα με τα γεωμετρικά μοντέλα που, όπως θα δούμε αργότερα, χρησιμοποιούσαν οι Αρχαίοι Έλληνες αστρονόμοι. Τα αριθμητικά αυτά μοντέλα (που είχαν συνήθως τη μορφή απλών αριθμητικών προόδων) επέτρεπαν στους Βαβυλώνιους αστρονόμους-ιερείς, παρακολουθώντας τις καθημερινές θέσεις του ήλιου, της σελήνης και των πλανητών στο ζωδιακό κύκλο και προβάλλοντας τις παρατηρήσεις του παρελθόντος στο μέλλον, να προβλέπουν διάφορα φαινόμενα, όπως είναι η εμφάνιση της νέας σελήνης (πράγμα πολύ σημαντικό για το βαβυλωνιακό ημερολόγιο, καθώς η νέα σελήνη σήμαινε την αρχή ενός νέου μήνα), οι εκλείψεις της σελήνης, το ενδεχόμενο να συμβεί ή όχι ηλιακή έκλειψη κτλ.

2 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ ΣΤΗΝ ΑΙΓΥΠΤΟ

Ο αιγυπτιακός πολιτισμός, όπως και ο πολιτισμός της Μεσοποταμίας, είναι ένας από τους αρχαιότερους πολιτισμούς που αναπτύχθηκαν εδώ και πέντε χιλιάδες χρόνια στις παραποτάμιες κοιλάδες της Ασίας και της Αφρικής. Φαίνεται ότι ήταν ένας από τους πιο ειρηνικούς πολιτισμούς. Στην ιστορία της Μεσοποταμίας, για παράδειγμα, μεγάλο μέρος καταλαμβάνουν οι συνεχείς πόλεμοι στους οποίους είχαν εμπλακεί οι λαοί της για περισσότερα από δύο χιλιάδες χρόνια - για να περιοριστούμε στην προχριστιανική μόνο περίοδο. Από την ελληνική ιστορία, εξάλλου, γνωρίζουμε ότι στην Αρχαία Ελλάδα επίσης, οι πόλεμοι ήταν ένα μάλλον συχνό φαινόμενο. Το ακριβώς αντίθετο συνέβαινε στην Αίγυπτο. Γράφει σχετικά με αυτό ο O. Neugebauer: «Ανάμεσα σε όλους τους αρχαίους πολιτισμούς, ο πιο ευχάριστος



Αιγύπτιος γραφέας. Αγαλματίδιο από ασβεστόλιθο που χρονολογείται από το Παλαιό Βασίλειο (Πέμπτη Δυναστεία), γύρω στο έτος 2500 π.Χ. Σήμερα φυλάσσεται στο Μουσείο του Λούβρου.

ήταν νομίζω ο αιγυπτιακός. Προστατευμένη καθώς είναι από την έρημο και τη θάλασσα, η κοιλάδα του Νείλου δεν ευνόησε την υπερβολική ανάπτυξη του ηρωικού πνεύματος που, τόσο συχνά, έκανε τη ζωή στην Ελλάδα αληθινή κόλαση. Ίσως να μην υπάρχει άλλη χώρα στην αρχαιότητα όπου να διατηρήθηκε για τόσο μεγάλο διάστημα ένας ειρηνικός και ασφαλής πολιτισμένος βίος. Οπωσδήποτε, ούτε η Αίγυπτος γλίτωσε τις βίαιες εξωτερικές και εσωτερικές συγκρούσεις, όμως σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι η ειρήνη στη Μεσοποταμία και στην Ελλάδα πρέπει να ήταν τόσο σπάνια κατάσταση όσο ήταν ο πόλεμος στην Αίγυπτο.»

Ο αιγυπτιακός πολιτισμός φημίζεται για την εκλεπτυσμένη τέχνη και για τον πλούτο των τεχνικών και πρακτικών επιτευγμάτων που συνδέονται με την κατασκευή μεγάλων μνημείων, όπως είναι οι πυραμίδες, οι οβελίσκοι και οι κολοσσοί. Σε ό,τι αφορά τις επιστημονικές γνώσεις, αυτές πρέπει να συναχθούν από ελάχιστα κείμενα που διασώζονται, καθώς οι πάπυροι στους οποίους έγραφαν συνήθως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι είναι ένα υλικό που αντέχει πολύ λίγο στο χρόνο.

Τα κείμενα μαθηματικού και αστρονομικού περιεχομένου που διασώζονται από τον αιγυπτιακό πολιτισμό και είναι προγενέστερα της ελληνιστικής περιόδου (για την ελληνιστική περίοδο βλ. κεφάλαιο 2, ενότητα 5) είναι πολύ λίγα. Συνήθως είναι γραμμένα στην ιερατική γραφή και τα περισσότερα χρονολογούνται από την περίοδο 1850-1650 π.Χ. Αποτελούν επομένως, όπως εξάλλου συμβαίνει και με τις βαβυ-

λωνιακές πινακίδες, αυθεντικά τεκμήρια, τα οποία διασώζονται όπως ακριβώς τα παρέδωσαν οι ίδιοι οι γραφείς τους, χωρίς να μεσολαβούν διαδικασίες επανειλημμένης αντιγραφής που εμπεριέχουν κινδύνους αλλοιώσεων, κάτι που συμβαίνει με τα κείμενα της αρχαίας ελληνικής γραμματείας. Το σημαντικότερο όλων των κειμένων είναι ο περίφημος «πάπυρος Rhind», που οφείλει την ονομασία του στον Σκοτσέζο δικηγόρο A.H. Rhind (Ριντ, 1833-1863), ο οποίος τον αγόρασε το 1858 στο Λούξορ. Ο πάπυρος αντιγράφτηκε περί το 1650 π.Χ. από τον γραφέα A'h-Mosé (στα ελληνικά αποδίδεται συνήθως ως Άχμες ή Αχμής, είναι πιθανό πάντως να πρόκειται για το γνωστό - από αναφορές Ελλήνων συγγραφέων - όνομα Άμασις), και προέρχεται από ένα πρωτότυπο που χρονολογείται από το 1850 π.Χ. Σήμερα φυλάσσεται στο Βρετανικό Μουσείο του Λονδίνου.

Οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τρία διαφορετικά είδη γραφής: την **ιερογλυφική**, για επιγραφές σε μνημεία και σε σκληρές επιφάνειες, την **ιερατική**, που ήταν ένα είδος συνεχούς μορφής της ιερογλυφικής προσαρμοσμένο κατάλληλα για γραφή στη μαλακή επιφάνεια ενός πάπυρου ή ενός δέρματος, και, τέλος, τη **δημοτική**, που χρησιμοποιούνταν για τις καθημερινές ανάγκες από τον 7ο π.Χ. αι. και μετά. Με την ανακάλυψη της «λίθου της Ρωσέττης» το 1799 και την ανάγνωσή της στη δεκαετία 1820/30 από τον J.F. Champollion (Σαμπολιόν), επιλύθηκε το πρόβλημα της αποκρυπτογράφησης των ιερογλυφικών και στη συνέχεια της ιερατικής γραφής.

2.1 Η αιγυπτιακή αριθμητική

Το αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης ήταν δεκαδικό και βασιζόταν στην απλή επαναληπτική αρχή σύμφωνα με την οποία διαφορετικά σύμβολα για τις διαδοχικές δυνάμεις του 10 επαναλαμβάνονταν όσες φορές χρειαζόταν ώστε να σχηματιστεί ο εκάστοτε αριθμός. Στην ιερογλυφική γραφή, οι δυνάμεις του 10 από το 10^0 ως το 10^6 γράφονταν ως εξής:

Με αυτά τα επτά σύμβολα οι Αιγύπτιοι ήταν σε θέση να γράφουν οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.999.999, και αυτό αρκούσε για τις καθημερινές

1 10 100 1 000 10 000 100 000 1 000 000

απαιτήσεις τους. Σε ό,τι αφορά δε τα κλάσματα, δεν γνώριζαν παρά μόνο τα κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα (που θα τα ονομάζουμε «κλασματικές μονάδες»), καθώς και το κλάσμα 2/3.

Σε ένα τέτοιο αριθμητικό σύστημα η πρόσθεση των ακέραιων αριθμών δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία. Αρκούσε απλώς να αντικαθίστανται δέκα όμοια σύμβο-

λα με ένα σύμβολο της αμέσως επόμενης τάξης. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει αντίθετα η πράξη του πολλαπλασιασμού. Η **αιγυπτιακή μέθοδος πολλαπλασιασμού** βασίζεται στις πράξεις του διπλασιασμού, του υποδιπλασιασμού και, τέλος, της πρόσθεσης.

Αυτή η μέθοδος πολλαπλασιασμού αποτελεί τη βάση ολόκληρης της αιγυπτιακής αριθμητικής. Αν και ήταν πολύ αρχαία, διατηρήθηκε χωρίς αλλαγές στην ελληνιστική περίοδο. Μάλιστα, στα ελληνικά σχολεία των πρώτων μεταχριστιανικών αιώνων διδασκόταν ως «αιγυπτιακός λογισμός». Σε ό,τι αφορά, τέλος, τη διαίρεση οι Αιγύπτιοι δεν τη θεωρούσαν ξεχωριστή πράξη. Έτσι, τη διαίρεση λ.χ. 156:12 τη διατύπωναν λέγοντας «πολλαπλασίασε με το 12 μέχρι να βρεις 156», και την εκτελούσαν σαν πολλαπλασιασμό.

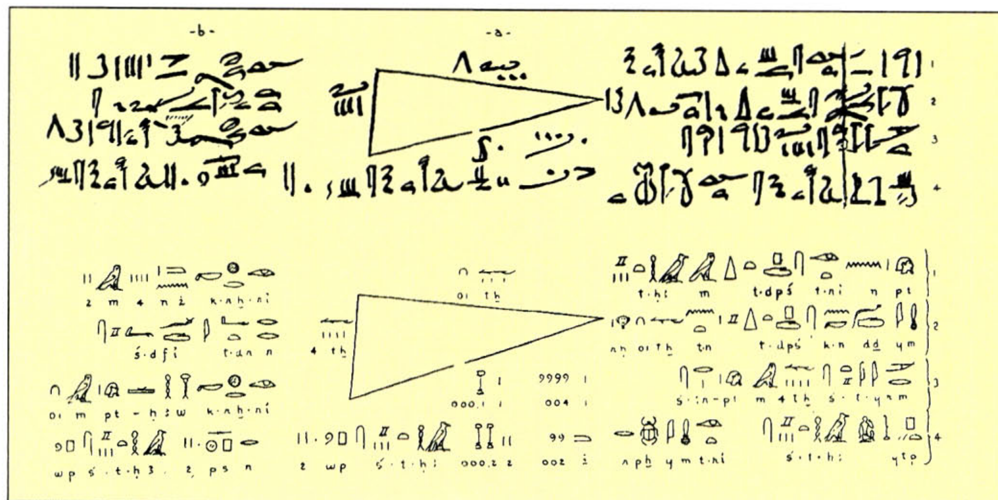
Για να πολλαπλασιάσει το 12 με το 7 ο Αιγύπτιος εργαζόταν ως εξής:

1	7	δηλαδή	1 (φορά το 7)	7
2	14	δηλαδή	2 (φορές το 7)	14
\ 4	28	δηλαδή	4 (φορές το 7 ή 2 φορές το 14)	28
\ 8	56	δηλαδή	8 (φορές το 7 ή 2 φορές το 28)	56
άθροισμα	84			

Στο τέλος, 4 φορές το 7 και 8 φορές το 7 προστίθενται, για να έχουμε 12 φορές το 7, που είναι ίσο με 28 + 56 = 84. Οι πλάγιες γραμμές αριστερά δηλώνουν ακριβώς τους αριθμούς που πρέπει να προστεθούν.

2.2 Η αιγυπτιακή γεωμετρία

Η αιγυπτιακή γεωμετρία βρισκόταν στο ίδιο περίπου στοιχειώδες επίπεδο όπως και στη Μεσοποταμία, με τη σημαντική διαφορά ότι **οι Αιγύπτιοι αγνοούσαν τις μετρικές σχέσεις των ορθογωνίων τριγώνων**. Και εδώ δεν υπάρχει η παραμικρή νύξη για θεωρήματα και αποδείξεις. Το περιεχόμενό της ήταν ο υπολογισμός εμβαδών και όγκων διαφόρων σχημάτων με βάση κανόνες, άλλοι από τους οποίους ήταν σωστοί και άλλοι όχι. Τα πιο αξιόλογα αποτελέσματα είναι ο υπολογισμός του όγκου μιας κόλουρης πυραμίδας ειδικής μορφής (με τετραγωνική βάση και μια παράπλευρη ακμή κάθετη στη βάση) και ο υπολογισμός του εμβαδού του κύκλου με βάση έναν κανόνα που αντιστοιχεί στον τύπο $E = [(1 - 1/9)d]^2$, όπου d η διάμετρος. Ο τύπος αυτός οδηγεί στην προσεγγιστική τιμή του $\pi = 256/81 = 3{,}16...$, η οποία είναι αρκετά καλή και ασφαλώς πολύ καλύτερη από την τιμή $\pi = 3$ που χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι.



Το πρόβλημα 51 του παπύρου Rhind. Στο επάνω μέρος, το κείμενο του προβλήματος στην ιερατική γραφή, όπως εμφανίζεται στον πάπυρο. Στο κάτω μέρος, η "μεταγραφή" του στα ιερογλυφικά. Οι αιγυπτιολόγοι χρησιμοποιούν πάντοτε τη μέθοδο της "μεταγραφής" των κειμένων από τα ιερατικά στα ιερογλυφικά, προτού τα μεταφράσουν τελικά σε μια σύγχρονη γλώσσα.

2.3 Η επίδραση της αιγυπτιακής επιστήμης

Οι Αρχαίοι Έλληνες επαινούσαν συχνά τις μαθηματικές ικανότητες των Αιγυπτίων και θεωρούσαν ότι τα μαθηματικά κατάγονται από την Αίγυπτο. Εξετάζοντας, όμως, συνολικά τα αιγυπτιακά μαθηματικά, δεν μπορούμε να κρύψουμε ένα αίσθημα απογοήτευσης σε ό,τι αφορά το επίπεδό τους, όση εκτίμηση κι αν έχουμε για μερικά επιμέρους επιτεύγματα. Οι δύσκαμπτοι αριθμητικοί υπολογισμοί, ο περίπλοκος κλασματικός λογισμός, που οφείλεται στην απουσία άλλων κλασμάτων πλην των κλασματικών μονάδων, και η χρησιμοποίηση της γεωμετρίας ως εφαρμοσμένης αριθμητικής, κάθε άλλο παρά ευνόησαν την ανάπτυξη των μαθηματικών και ασφαλώς δεν αποτέλεσαν καλή παρακαταθήκη για την ανάπτυξη του λαμπρού οικοδομήματος των ελληνικών μαθηματικών.

Εξαιρετικά πρωτόγονη ήταν επίσης η αιγυπτιακή αστρονομία, η οποία σε ένα μόνο σημείο άσκησε ευεργετική επίδραση στους Έλληνες αστρονόμους: στη χρήση ενός ημερολογίου, το οποίο ο Neugebauer χαρακτηρίζει ως το πιο έξυπνο ημερολόγιο που υπήρξε ποτέ στην ιστορία του ανθρώπου. Το **αιγυπτιακό ημερολόγιο** περιλάμβανε 12 μήνες με 30 ημέρες ο καθένας και 5 επιπλέον ημέρες στο τέλος του χρόνου. Δημιουργήθηκε από καθαρά πρακτικές ανάγκες, χωρίς την παραμικρή μέριμνα για

την επίλυση αστρονομικών προβλημάτων. Η απλότητα και ο σταθερός χαρακτήρας του ημερολογίου αυτού, έναντι όχι μόνο του βαβυλωνιακού αλλά και των ελληνικών ημερολογίων (με τις ποικίλες παρεμβολές που υπαγορεύονταν από την ανάγκη να συμβαδίζουν, στη διάρκεια μιας περιόδου, οι ηλιακοί με τους σεληνιακούς κύκλους), κατέστησαν το αιγυπτιακό ημερολόγιο εξαιρετικά εύχρηστο για αστρονομικούς υπολογισμούς, και την αρετή του αυτή την αναγνώρισαν απόλυτα οι αστρονόμοι της ελληνιστικής εποχής.

Ερωτήσεις

1) Να περιγράψετε τα βασικά χαρακτηριστικά του βαβυλωνιακού αριθμητικού συστήματος. Ποια είναι τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματά του; Να αναφέρετε ομοιότητες και διαφορές με το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα.

2) Να μετατρέψετε τους αριθμούς του παραδείγματος της παραγράφου 1.2 («Η βαβυλωνιακή γεωμετρία») από το εξηκονταδικό στο γνωστό μας δεκαδικό σύστημα και να επαληθεύσετε κατόπιν τον τύπο του Πυθαγορείου θεωρήματος. (*)

3) Να αναφέρετε μία σημαντική, κατά τη γνώμη σας, συμβολή των Αιγυπτίων στην ιστορία των φυσικομαθηματικών επιστημών. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4) Να συγκρίνετε τη συνεισφορά στις φυσικομαθηματικές επιστήμες των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές εντοπίζετε;

5) Να περιγράψετε με συντομία το είδος των πηγών από τις οποίες αντλούμε τις γνώσεις μας για τη βαβυλωνιακή και την αιγυπτιακή επιστήμη. Ποιες είναι οι ιστοριογραφικές συνέπειες που το είδος των πηγών έχει για την ανασυγκρότηση της ιστορίας της επιστήμης στις αντίστοιχες περιόδους;

** Οι ερωτήσεις με αστερίσκο είναι προαιρετικές*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

Περισσότερα από χίλια χρόνια θα μεσολαβήσουν από την εποχή που γράφτηκαν τα παλαιο-βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα και ο αιγυπτιακός πάπυρος του Rhind ώσπου να χαράξει μια νέα εποχή στην ιστορία της επιστήμης, η εποχή της ελληνικής επιστήμης. Εδώ οφείλουμε να διευκρινίσουμε ότι λέγοντας «ελληνική επιστήμη» δεν εννοούμε απλώς την επιστήμη που αναπτύχθηκε εντός των συνόρων της σημερινής Ελλάδας, αλλά την επιστημονική δραστηριότητα που ανέπτυξαν οι άνθρωποι που μιλούσαν και έγραφαν στην ελληνική γλώσσα. Έτσι, η πρώιμη ελληνική επιστήμη του 6ου και του 5ου π.Χ. αι. αναπτύχθηκε κυρίως από πληθυσμούς που κατοικούσαν στην Ιωνία, στα δυτικά παράλια της Μικράς Ασίας και στη Μεγάλη Ελλάδα (Σικελία και Κάτω Ιταλία). Τον 4ο π.Χ. αι. το κέντρο της επιστημονικής δραστηριότητας μεταφέρθηκε στην Αθήνα και ιδίως στην Ακαδημία που ίδρυσε ο Πλάτων περί το 385 π.Χ. και στο Λύκειο που ίδρυσε ο Αριστοτέλης το 337/6 π.Χ., καθώς με τα δύο αυτά κορυφαία πνευματικά ιδρύματα συνδέθηκαν με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο όλοι σχεδόν οι διανοητές του 4ου π.Χ. αι. τους οποίους γνωρίζουμε, από οποιοδήποτε μέρος της Ελλάδας κι αν κατάγονταν. Στην ελληνιστική περίοδο εξάλλου, η πιο σημαντική εστία επιστημονικής έρευνας γίνεται η Αλεξάνδρεια της σημερινής Αιγύπτου. Εκεί γράφονται τα δύο πιο γνωστά ελληνικά επιστημονικά συγγράμματα, τα *Στοιχεία* [ή *Στοιχείωσις*] του Ευκλείδη και η *Μαθηματική σύνταξις* του Πτολεμαίου. Τέλος, για να αναφέρουμε ένα ακόμη παράδειγμα, ο Νικόμαχος, συγγραφέας μιας *Αριθμητικής εισαγωγής* που άσκησε μεγάλη επίδραση σ' όλη τη διάρκεια του Μεσαίωνα, έζησε τον 1ο μ.Χ. αι. στην πόλη Γέρασα της Παλαιστίνης, όχι μακριά από την Ιερουσαλήμ. Από τα λίγα αυτά παραδείγματα βλέπουμε ότι η ελληνική επιστήμη απλώνεται σε μια έκταση που ξεπερνά κατά πολύ τα όρια της σημερινής Ελλάδας, ενώ πολύ μεγάλη είναι και η χρονική περίοδος που καλύπτει, αφού, όπως θα δούμε, αρχίζει ήδη από τον 6ο π.Χ. αι., για να διαρκέσει ως τον 6ο μ.Χ. αιώνα.

1 ΟΙ ΠΡΟΣΩΚΡΑΤΙΚΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΦΙΛΟΣΟΦΟΙ ΚΑΙ Ο «ΚΟΣΜΟΣ»

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΟΡΟΥ «ΠΡΟΣΩΚΡΑΤΙΚΟΣ»

Ο όρος «προσωκρατικός» μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο διαφορετικές σημασίες:

1. Για να δηλώσει τους Αρχαίους Έλληνες διανοητές που άκμασαν πριν από το θάνατο του Σωκράτη (399 π.Χ.).

2. Για να δηλώσει όλους εκείνους τους διανοητές που δε συνδέονταν με τη φιλοσοφική σχολή του Σωκράτη και του Πλάτωνα, περιλαμβανομένων και των σοφιστών, μερικοί από τους οποίους ήταν σύγχρονοι ή και κατά τι μεταγενέστεροι του Σωκράτη.

Με τη δεύτερη αυτή σημασία χρησιμοποιεί τον όρο ο H. Diels (Ντιλς) στο μνημειώδες έργο του *Die Fragmente der Vorsokratiker* [Τα αποσπάσματα των Προσωκρατικών].

Με τους Προσωκρατικούς, ειδικά με τους Μιλήσιους φιλοσόφους, αρχίζει να πραγματοποιείται μια μεγάλη μεταλλαγή στην κατανόηση και την ερμηνεία του φυσικού κόσμου, που ολοκληρώθηκε τους επόμενους αιώνες με τα λαμπρά επιτεύγματα της αρχαιοελληνικής σκέψης.

Σύμφωνα με τον ιστορικό της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας και επιστήμης Geoffrey E.R. Lloyd (Τζέφρυ Λόυντ) υπάρχουν δύο κύρια χαρακτηριστικά που πρωτοεμφανίζονται με τους προσωκρατικούς φιλοσόφους και τους διαχωρίζουν από όλους τους προηγούμενους στοχαστές, Έλληνες και μη. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι:

- η ανακάλυψη της φύσης και η έξωση του υπερφυσικού από τις ερμηνείες των φυσικών φαινομένων,
- η πρακτική της δημόσιας αντιπαράθεσης απόψεων και της ορθολογικής κριτικής.

Ο Lloyd με τον όρο «ανακάλυψη της φύσης» εννοεί την κατανόηση από τους προσωκρατικούς φιλόσοφους της διαφοράς μεταξύ του φυσικού και του υπερφυσικού. Για πρώτη φορά στην ιστορία, κάποια φυσικά φαινόμενα δε θεωρούνται πια ως το αποτέλεσμα τυχαίων ή αυθαίρετων υπερφυσικών επιρροών αλλά ως το αποτέλεσμα κανονικών και προσδιορίσιμων ακολουθιών από φυσικές **«αιτίες»** και **«αποτελέσματα»**. Ταυτόχρονα, για πρώτη φορά δημιουργείται η έννοια της κατηγορίας φαινομένων, δηλαδή φαινομένων που πρέπει να έχουν κοινά ή παρόμοια αίτια. Παρά το ότι οι περισσότερες από τις ερμηνείες που έδωσαν στα φυσικά φαινόμενα ήταν επηρεασμένες από παλαιότερες μυθικές αντιλήψεις, διέφεραν ουσιαστικά από τις αντίστοιχες μυθικές εξιστορήσεις, γιατί απέφευγαν κάθε αναφορά σε υπερφυσικές δυνάμεις. Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι ήταν άθεοι. Αναφέρεται ότι ο Θαλής πίστευε ότι «όλα τα πράγματα είναι γεμάτα θεότητες». Ενώ, λοιπόν, οι θεότητες συχνά διατηρούσαν ουσιαστική θέση στις κοσμολογικές θεωρίες τους, το υπερφυσικό δεν περιλαμβανόταν στις *ερμηνείες* τους.

Ας αναφέρουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, για να γίνει κατανοητή αυτή η ουσιαστική μεταλλαγή που έγινε στη σκέψη των στοχαστών αυτών. Η ερμηνεία που ο Θαλής έδωσε για τους σεισμούς ήταν ότι η γη επέπλεε στη θάλασσα και οι σεισμοί ήταν το αποτέλεσμα ισχυρών κυμάτων που από καιρό σε καιρό την κτυπούσαν. Η εικόνα της γης που επιπλέει στο νερό ήταν συνηθισμένη στους αιγυπτιακούς και στους βαβυλωνιακούς μύθους. Υπεύθυνοι όμως για κάθε συγκεκριμένο σεισμό στις μυθικές εξιστορήσεις ήταν κάθε φορά οι Θεοί που έλεγχαν τα ύδατα. Αιτία των σεισμών ήταν η οργή τους, που οφειλόταν κάθε φορά σε μια διαφορετική αιτία. Ακόμη και στην ελληνική μυθολογία η ιδέα ότι υπεύθυνος για τους σεισμούς ήταν ο Ποσειδώνας, ο Θεός των υδάτων, ήταν τρέχουσα. Ο Θαλής και η Μιλήσια σχολή της σκέψης δεν αρνήθηκαν την ύπαρξη του Ποσειδώνα, αλλά δεν τη χρησιμοποίησαν στην ερμηνεία που έδωσαν στο φαινόμενο των σεισμών. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει στο βιβλίο του *Η επιστήμη στην Αρχαία Ελλάδα* (1944), ο ιστορικός της ελληνικής επιστήμης B. Farrington (Φάρρινκτον) «οι Μιλήσιοι άφησαν τους Θεούς απέξω». Ο θυμός ή οι έρωτες του Δία ή του Ποσειδώνα, οι οποίοι στον Όμηρο και στον Ησίοδο αποτελούσαν αιτίες της «συμπεριφοράς» της φύσης, για τους Μιλήσιους παύουν να παίζουν ρόλο. Μέσα από τη μεταλλαγή αυτή οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι πραγματοποίησαν ένα μεγάλο βήμα στη μακρά και επίπονη πορεία του ανθρώπου προς την ορθολογική γνώση και ερμηνεία του φυσικού κόσμου.

Η έξωση των θεοτήτων από την ερμηνεία των φυσικών φαινομένων είχε και ένα άλλο άμεσο και ουσιαστικό αποτέλεσμα. Δεν υπήρχε πια η ανάγκη να ερμηνευθεί ο εκάστοτε «συγκεκριμένος» σεισμός με διαφορετική κάθε φορά αιτία. Η αιτία όλων των σεισμών έπρεπε να είναι η ίδια. Οι σεισμοί (και άλλα φυσικά φαινόμενα βέβαια) άρχισαν να γίνονται κατανοητοί ως κατηγορία φαινομένων με τα ίδια χαρακτηριστικά. Έτσι, για πρώτη φορά οι ερμηνείες αφορούσαν σε κατηγορίες φυσικών φαινομένων και, επομένως, έπρεπε να αναφέρονται στα γενικά και κύρια χαρακτηριστικά και όχι στα ειδικά και περιπτωσιακά.

Το δεύτερο ουσιαστικό χαρακτηριστικό, κοινωνικό αυτή τη φορά, φαίνεται ότι υπήρξε η **δημόσια κριτική συζήτηση των απόψεων στο πλαίσιο της πόλης**. Οι φιλόσοφοι όχι μόνο γνώριζαν τις ιδέες και τις αντιλήψεις των συγχρόνων και των παλαιοτέρων τους αλλά και έκριναν ο ένας τις ιδέες του άλλου. Η δημόσια αποδοχή ή κριτική των ιδεών για τη φύση και τον υλικό κόσμο αποτελούσαν μέρος της διαδικασίας για τη νομιμοποίησή τους, δηλαδή συνιστούσαν απαραίτητο όρο για να γίνουν ευρύτερα αποδεκτές.

Δυστυχώς έχουν διασωθεί ελάχιστα εδάφια από τα έργα των προσωκρατικών φιλοσόφων. Έτσι δε γνωρίζουμε από πρώτο χέρι τις θεωρίες τους για τη φύση. Βασιζόμαστε σε όσα γράφτηκαν πολύ αργότερα γι' αυτούς. Οι έρευνές τους πρέπει να



Ψηφιδωτό του 1ου π.Χ. αι. που απεικονίζει, κατά την πιθανότερη εκδοχή, τους επτά σοφούς και κατά μια άλλη εκδοχή τον Πλάτωνα να διδάσκει γεωμετρία. Νεάπολη, Εθνικό Μουσείο.

ήταν περιορισμένες σε ορισμένες θεματικές περιοχές και ο τρόπος που γίνονταν δεν είχε βέβαια σχέση με τον τρόπο που σήμερα γίνεται η μελέτη της φύσης. Στην πραγματικότητα δεν επρόκειτο για ένα διαμορφωμένο σύστημα έρευνας με συγκεκριμένες μεθοδολογίες. Πολύ περισσότερο δεν είχαν την έννοια της «επιστημονικής έρευνας», όπως την εννοούμε σήμερα. Πολλές άλλωστε από τις έννοιες που χρησιμοποίησαν για να ερμηνεύσουν τη λειτουργία του υλικού κόσμου είχαν στην εποχή τους διαφορετική σημασία από αυτήν που απέκτησαν αργότερα, την εποχή της ακμής της κλασικής φιλοσοφίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι έννοιες της «ύλης» και της «ουσίας», που θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, εάν θέλουμε να διατυπώσουμε τα προβλήματα που τους απασχόλησαν· οι έννοιες αυτές, όμως, πήραν το τελικό τους περιεχόμενο περίπου τον 4ο π.Χ. αιώνα.

Με βάση τα προηγούμενα, θα πρέπει να είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί, όταν μελετάμε τις απόψεις των Προσωκρατικών για τη φύση, αποφεύγοντας τις εύκολες αναγωγές σε σημερινά επιστημονικά προβλήματα.

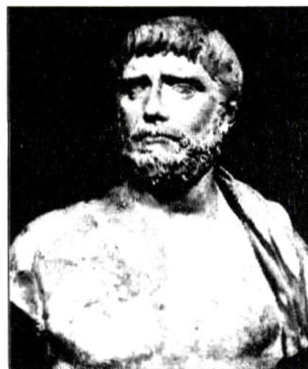
2 ΤΑ ΠΡΟΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι γνώσεις μας για τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν τον 6ο και τον 5ο π.Χ. αι. είναι αποσπασματικές. Κανένα κείμενο της εποχής δε διασώζεται ακέραιο και οι πληροφορίες που έχουμε προέρχονται από συγγραφείς που έζησαν έως και 1000

χρόνια αργότερα. Τις περισσότερες πληροφορίες τις αντλούμε από την επισκόπηση της ιστορίας της γεωμετρίας που περιέλαβε ο Νεοπλατωνικός φιλόσοφος Πρόκλος στο σχόλιό του, στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Αν και ο Πρόκλος έζησε τον 5ο μ.Χ. αι., η επισκόπησή του θεωρείται αρκετά αξιόπιστη, γιατί βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στη χαμένη σήμερα *Ιστορία της γεωμετρίας* που είχε γράψει ο μαθητής του Αριστοτέλη Εύδημος, δηλαδή ένας συγγραφέας που έζησε σε μια εποχή αρκετά κοντινή προς την περίοδο που εξετάζουμε.

2.1 Η σχολή της Ιωνίας

Στην επισκόπησή του ο Πρόκλος παραθέτει με χρονολογική σειρά τα ονόματα των επιφανέστερων Ελλήνων μαθηματικών που έζησαν πριν από τον Ευκλείδη. Αυτός ο «Κατάλογος των γεωμετρών» αρχίζει με το Θαλή (περ. 624-547 π.Χ.). Ωστόσο, παρ' όλο που η μνεία του ονόματος του Μιλήσιου σοφού στην αρχή του «Καταλόγου» έχει χαράξει τη μνήμη των αιώνων, η ιστορική κριτική είναι επιφυλακτική ως προς την αλήθεια των διαφόρων αφηγήσεων που μας έχει μεταφέρει η παράδοση για τα επιτεύγματά του, δεδομένου μάλιστα ότι ο ίδιος ο Θαλής δε φαίνεται να έγραψε ποτέ κανένα βιβλίο. Η παράδοση, λοιπόν, αποδίδει στο Θαλή την πρόβλεψη της έκλειψης ηλίου του έτους 585 π.Χ., την εφαρμογή του κριτηρίου Γωνία - Πλευρά - Γωνία της ισότητας των τριγώνων, την ανακάλυψη των θεωρημάτων για την ισότητα των παρά τη βάση γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου και για την ισότητα των κατά κορυφή γωνιών, την κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, και την απόδειξη της πρότασης ότι η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη. Δεν είναι δυνατόν, φυσικά, να γίνεται λόγος για αληθινές αποδείξεις των προτάσεων αυτών από το Θαλή. **Την εποχή εκείνη έλειπαν τόσο το λογικό υπόβαθρο όσο και η αξιωματική συγκρότηση που κάνουν δυνατή μια μαθηματική απόδειξη.**

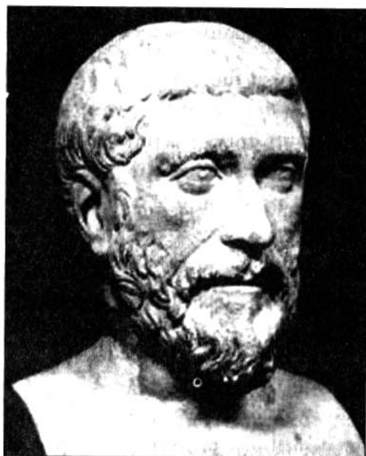


Θαλής ο Μιλήσιος.

Επομένως, η συμβολή του Θαλή δεν πρέπει να αναζητηθεί σ' αυτά. Τότε, όμως, που θα πρέπει να την αναζητήσουμε; Αν εξετάσουμε προσεκτικά τις παραπάνω προτάσεις, θα διαπιστώσουμε ότι όλες σχεδόν περιστρέφονται γύρω από τις έννοιες της **συμμετρίας** και της **ισότητας γωνιών**. Ίσως, λοιπόν, να μην είμαστε μακριά από την πραγματικότητα, αν πούμε ότι τα θέματα που μελέτησε ο Θαλής ήταν **η ομοιότητα μερικών απλών σχημάτων με ίσες γωνίες, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες μια ομοιότητα μετατρέπεται σε ισότητα και οι ιδιότητες μερικών συμμετρικών σχημάτων**.

Έστω και σ' αυτόν τον πυρήνα των ιδεών αν περιορίζεται, η συμβολή του Θαλή, και γενικότερα των Ιώνων γεωμετρών του 6ου π.Χ. αι., είναι εξαιρετικά σημαντική.

Όμως η συμβολή τους γίνεται πολύ μεγαλύτερη, αν στα προηγούμενα προσθέσουμε την καινοτομία που για πρώτη φορά εισήγαγαν, να προσδώσουν δηλαδή στο γεωμετρικό σχήμα ένα νέο ρόλο, που ποτέ δεν είχε στο παρελθόν. Στους αιγυπτιακούς παπύρους και στις βαβυλωνιακές πινακίδες συναντάμε μερικές φορές χαραγμένα γεωμετρικά σχήματα· ο ρόλος τους, όμως, ήταν τελείως επουσιώδης, αφού χρησίμευαν απλώς για να σημειώνονται σε αυτά οι αριθμητικές τιμές των δεδομένων του εκάστοτε προβλήματος (π.χ. το μήκος μιας πλευράς). **Με τους Ίωνες το σχήμα γίνεται για πρώτη φορά στην ιστορία αντικείμενο μελέτης και μαθηματικού στοχασμού**. Η χάραξή του, η παρατήρηση των ιδιοτήτων του και στη συνέχεια η δικαιολόγηση του ισχυρισμού (σε ό,τι αφορά τις ιδιότητες) προς τον «άλλο», τον συνομιλητή, είναι μερικά από τα αρχικά στάδια της εξέλιξης της γεωμετρίας που μπορούμε να τα αποδώσουμε στο Θαλή και στη σχολή της Ιωνίας· και αυτή είναι, ίσως, η σημαντικότερη συνεισφορά της σχολής αυτής στην ιστορία των μαθηματικών.

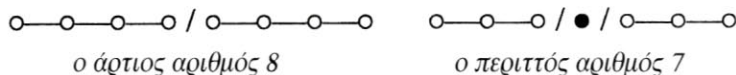


Πυθαγόρας ο Σάμιος.

2.2 Η σχολή των Πυθαγορείων

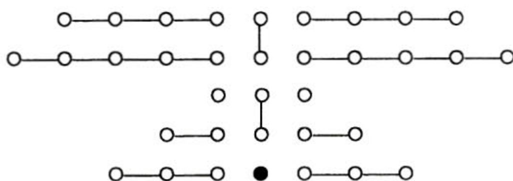
Ύστερα από τους Ίωνες ακολουθούν διαδοχικά η σχολή των Πυθαγορείων και η σχολή της Χίου. Οι πληροφορίες που έχουμε είναι ασυγκρίτως καλύτερα τεκμηριωμένες για τη δεύτερη παρά για την πρώτη. Πράγματι, οι γνώσεις μας για τον Πυθαγόρα (περ. 572-497 π.Χ.) και τους πρώτους μαθητές του αντλούνται αποκλειστικά από έργα μεταγενέστερων συγγραφέων, στους οποίους περιλαμβάνονται και οι λεγόμενοι **«Νεοπυθαγόρειοι»** - όπως ο Νικόμαχος ο Γερασηνός, ο Θέων ο Σμυρναίος (2ος μ.Χ. αι.) και ο Ιάμβλιχος (5ος μ.Χ. αι.) - οι οποίοι είχαν την τάση να αποδίδουν άκριτα στους «παλαιούς», και κυρίως στον ίδιο τον Πυθαγόρα, κάθε είδους επιστημονική γνώση. Οι σύγχρονοί του, όμως, φαίνεται ότι θεωρούσαν τον Πυθαγόρα περισσότερο ως θρησκευτικό προφήτη και λιγότερο ως μαθηματικό. Πρέπει να υπογραμμίσουμε πάντως ότι η διδασκαλία του διέφερε από άλλες αντίστοιχες διδασκαλίες της εποχής ως προς το ότι απέδιδε πολύ μεγάλη σημασία στα Μαθηματικά, πρεσβεύοντας ότι αυτά είναι η οδός για την απελευθέρωση της ψυχής. Το πιο σημαντικό μέρος των μαθηματικών για τους Πυθαγορείους ήταν η Αριθμητική. Γιατί, όπως έλεγε ο Πυθαγόρας, «τα στοιχεία των αριθμών είναι στοιχεία όλων των όντων». Αποδίδοντας, λοιπόν, τόσο μεγάλη σημασία στους αριθμούς, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του επιδόθηκαν στη μελέτη των ιδιοτήτων τους.

Οι Πυθαγόρειοι αντιλαμβάνονταν τους αριθμούς *ως ορισμένα πλήθη ορισμένων αντικειμένων* και τους απεικόνιζαν με **«ψήφους»** (στιγμές). Αυτός ο τρόπος παράστασης τους έδωσε τη δυνατότητα να προβούν σε μια πρώτη βασική ταξινόμηση των αριθμών σε **άρτιους** και **περιττούς**. Έναν άρτιο αριθμό τον παρίσταναν με μια σειρά ψήφων, η οποία μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη. Ένας περιττός αριθμός, αντίθετα, δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη, γιατί πάντοτε περισσεύει μία ψήφος.



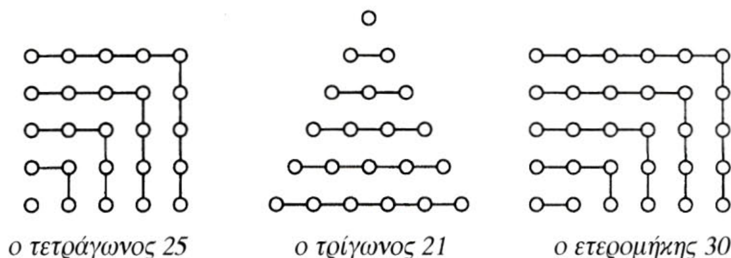
ο άρτιος αριθμός 8 *ο περιττός αριθμός 7*

Με αυτό τον τρόπο παράστασης των αριθμών είναι απλή υπόθεση η δικαιολόγηση μερικών στοιχειωδών θεωρημάτων, όπως, για παράδειγμα, ότι το άθροισμα άρτιων αριθμών είναι άρτιος, το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών είναι άρτιος ή το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός αριθμός. Το τελευταίο θεώρημα, λ.χ., θα μπορούσε να είχε δικαιολογηθεί με ένα σχήμα όπως αυτό που ακολουθεί:



Το σχήμα δείχνει ότι το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών είναι περιττός.

Άλλο κεφάλαιο της αριθμητικής των Πυθαγορείων αποτελεί η θεωρία των «παραστατικών» αριθμών. Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζονται τρεις παραστατικοί αριθμοί: ο τετράγωνος 25, ο τρίγωνος 21 και ο ετερομήκης 30 (ετερομήκεις ονομάζονταν οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων· ο 30 γράφεται 5·6).



ο τετράγωνος 25 *ο τρίγωνος 21* *ο ετερομήκης 30*

Παρ' όλο που το ενδιαφέρον των Πυθαγορείων για τα μαθηματικά ήταν, όπως είδαμε, επικεντρωμένο κυρίως στην αριθμητική, κύρια συμβολή του Πυθαγόρα στην

ΟΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΕΣ ΤΡΙΑΔΕΣ

Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξαν οι Πυθαγόρειοι από τη μελέτη των παραστατικών αριθμών είναι η μέθοδος για την εύρεση των «πυθαγορείων τριάδων» (τρεις φυσικοί αριθμοί *Α, Β, Γ* αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα αν ικανοποιούν τη σχέση $A^2 + B^2 = \Gamma^2$). Πράγματι, ο Πρόκλος αποδίδει στον Πυθαγόρα την εύρεση των πυθαγορείων τριάδων της μορφής $(N, \frac{N^2-1}{2}, \frac{N^2+1}{2})$ όπου Ν περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 1, και στον Πλάτωνα την εύρεση των πυθαγορείων τριάδων της μορφής $(N, (N/2)^2 - 1, (N/2)^2 + 1)$, όπου *Ν* άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2. Από άλλη πηγή πάντως, ο δεύτερος τύπος αποδίδεται στον Πυθαγόρειο Αρχύτα (5ος π.Χ. αι.). Οι ιστορικοί των μαθηματικών έχουν αποδείξει ότι οι παραπάνω τύποι μπορούν εύκολα να δικαιολογηθούν με βάση τη θεωρία των παραστατικών αριθμών.

ιστορία των μαθηματικών από πολλούς θεωρείται το γνωστό θεώρημα για τα ορθογώνια τρίγωνα. Αν και η πραγματική σχέση του ίδιου του Πυθαγόρα με το θεώρημα αυτό δεν είναι εντελώς ξεκαθαρισμένη, σήμερα στα εγχειρίδια γεωμετρίας το «θεώρημα της υποτείνουσας» αναφέρεται με το όνομα «Πυθαγόρειο θεώρημα».

2.3 Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Πριν αφήσουμε τη σχολή των Πυθαγορείων και έρθουμε στη σχολή της Χίου, πρέπει να σταθούμε σε ένα μείζον επίτευγμα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, την ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Η χρονολογία και ο τρόπος με τον οποίο ανακαλύφθηκε η ασυμμετρία αποτελούν ερωτήματα τα οποία οι υπάρχουσες μαρτυρίες δε μας επιτρέπουν να απαντήσουμε με απόλυτη βεβαιότητα. Ωστόσο σύμφωνα με τον έγκυρο σχολιαστή Πάππο από την Αλεξάνδρεια (4ος μ.Χ. αι.) η ανακάλυψη αυτή έλαβε χώρα στους κόλπους της σχολής των Πυθαγορείων. Σε ό,τι αφορά τη χρονολογία, μόνο υποθέσεις μπορούμε να κάνουμε. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη ότι κατά το τελευταίο τέταρτο του 5ου π.Χ. αι. ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος απέδειξε την αρρητότητα, όπως θα λέγαμε σήμερα, των αριθμών $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{17}$, παραλείποντας δηλαδή την περίπτωση του $\sqrt{2}$, συμπεραίνουμε ότι η αρρητότητα του $\sqrt{2}$ πρέπει να είχε ήδη αποδειχθεί την εποχή αυτή. Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι η ασυμμετρία ανακαλύφθηκε σε μια εποχή που δεν απέχει πολύ από το έτος 430 π.Χ.

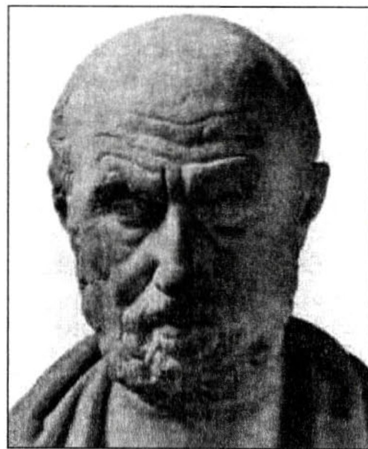
Επειδή η αρρητότητα του $\sqrt{2}$ εκφράζει την ασυμμετρία της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου (τη μη ύπαρξη, δηλαδή, κοινής μονάδας μέτρησης που να διαιρεί το κάθε ευθύγραμμο τμήμα ακέραιο αριθμό φορών), φαίνεται ότι η ασυμμετρία διαπιστώθηκε για πρώτη φορά σε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα. Ποια ήταν, όμως, η απόδειξη; Πραγματικά δε γνωρίζουμε. Διασώζεται πάντως μια αρκετά πρώιμη αριθμοθεωρητική απόδειξη, την οποία περιγράφει συνοπτικά ο Αριστοτέλης στο

έργο του *Αναλυτικά Ύστερα*, και παραθέτει λεπτομερώς ο συγγραφέας του παραρτήματος του 10ου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Μνημονεύσαμε παραπάνω τη συμβολή του Θεόδωρου στη μελέτη της ασυμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, στο διάλογο *Θεαίτητος* ο Πλάτων μας πληροφορεί ότι ο Θεόδωρος είχε αποδείξει ότι οι πλευρές των τετραγώνων με επιφάνεια 3, 5, ..., 17 τετραγωνικούς πόδες δεν είναι «σύμμετρες κατά το μήκος» προς τη μονάδα, προς το μήκος δηλαδή του ενός ποδός. Αν χρησιμοποιήσουμε τη σύγχρονη ορολογία, θα λέγαμε πως απέδειξε ότι οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ είναι άρρητοι. Πώς το απέδειξε αυτό; Δε γνωρίζουμε ακριβώς. Φαίνεται πάντως ότι η απόδειξη δεν ήταν ενιαία. Αναπτυσσόταν ξεχωριστά για την κάθε περίπτωση, σταμάτησε όμως στη $\sqrt{17}$, γιατί ενδεχομένως συνάντησε δυσκολίες σε αυτή ή στις επόμενες περιπτώσεις.

2.4 Η σχολή της Χίου

Ύστερα από την παρέκβαση αυτή στην οποία συζητήσαμε το θέμα της ασυμμετρίας, ας επανέλθουμε στην αφήγησή μας. Έχοντας ολοκληρώσει με τη σχολή των Πυθαγορείων, θα προχωρήσουμε τώρα στη λίγο μεταγενέστερη σχολή της Χίου. Ο επιφανέστερος εκπρόσωπος αυτής της σχολής, ο Ιπποκράτης (που δεν πρέπει να συγχέεται με το συνώνυμό του γιατρό από την Κω), άκμασε γύρω στο 435 π.Χ., ενώ ο δάσκαλός του Οινοπίδης ήταν κατά μία γενιά μεγαλύτερος. Αντίθετα με τις δύο προηγούμενες σχολές, οι πληροφορίες που έχουμε για τη σχολή της Χίου δεν περιορίζονται μόνο σε αφηγήσεις μεταγενέστερων σχολιαστών. Από αυτή την περίοδο και στο εξής αρχίζουμε να έχουμε σιγά-σιγά αυθεντικά κείμενα των ίδιων των πρωταγωνιστών της επιστήμης, και έτσι η εξιστόρηση της δραστηριότητάς τους γίνεται όλο και πιο αξιόπιστη. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε στη διάθεσή μας ένα εκτενές απόσπασμα για τον **τετραγωνισμό των μηνίσκων** (βλ. πιο κάτω, ενότητα 2.5) από τον Ιπποκράτη, το οποίο διέσωσε ο σχολιαστής του Αριστοτέλη Σιμπλίκιος (άκμασε γύρω στο 520 μ.Χ.) αντλώντας από το χαμένο έργο του Εύδημου, που έχουμε μνημονεύσει· πιστεύεται όμως ότι ένα μέρος του είναι αυθεντικό κείμενο του ίδιου του Ιπποκράτη.



Ιπποκράτης ο Χίος.

Η σχολή της Χίου σηματοδοτεί μια καμπή στην ιστορία των μαθηματικών. Αυτό οφείλεται κατ' αρχάς στο γεγονός ότι ο Ιπποκράτης ήταν ο συγγραφέας του πρώτου

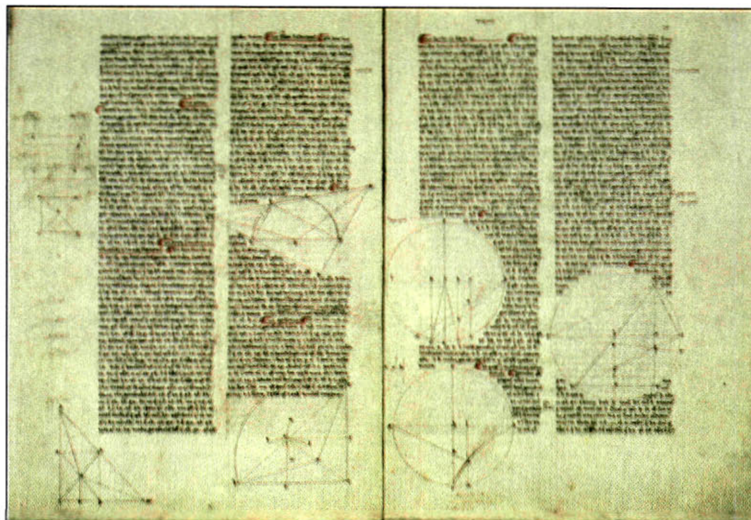
διδακτικού εγχειριδίου γεωμετρίας, το οποίο έφερε τον τίτλο ***Στοιχεία***, αλλά δυστυχώς δε διασώθηκε. Εκτός όμως από αυτό, με τη σχολή της Χίου γίνεται φανερό ότι βρισκόμαστε για πρώτη φορά στην ιστορία εν μέσω μιας ακμάζουσας ***γεωμετρικής παράδοσης***, όπου με τον όρο αυτό εννοούμε ένα **μεταβαλλόμενο σύνολο προβλημάτων** (μεταβαλλόμενο υπό την έννοια ότι ορισμένα απ' αυτά επιλύονταν, ενώ άλλα έδιναν την αφορμή να διατυπώνονται νέα), την επεξεργασία **αποδεκτών μεθόδων χειρισμού** αυτών των προβλημάτων, και, τέλος, τη συναίνεση σε ορισμένα **μέσα δικαιολόγησης** ή **εξήγησης των λύσεων** των προβλημάτων.

Βασικό στοιχείο της ελληνικής γεωμετρικής παράδοσης είναι η επιλογή των **ευθειών** και των **κύκλων** ως θεμέλιων λίθων για την εκτέλεση των γεωμετρικών κατασκευών. Η επιλογή αυτή φαίνεται ότι έγινε στα μέσα του 5ου π.Χ. αι. και συνδέεται με το έργο του Οινοπίδη. Αυτό προκύπτει εμμέσως από το γεγονός ότι ο Πρόκλος αποδίδει στον Οινοπίδη την επίλυση δύο γεωμετρικών προβλημάτων: την κατασκευή της κάθετης σε μια ευθεία από ένα σημείο εκτός αυτής και την κατασκευή, σε ένα σημείο μιας δεδομένης ευθείας, μιας γωνίας ίσης προς δεδομένη γωνία. Αν υποθέσουμε, όπως είναι εύλογο, ότι η πρακτική επίλυση των προβλημάτων αυτών, με τη χρήση κάποιου είδους γνώμονα, ήταν γνωστή πολύ πριν από την εποχή του Οινοπίδη, τότε σ' αυτόν θα πρέπει μάλλον να αποδώσουμε την επίλυσή τους με εκείνο τον τρόπο ο οποίος στη συνέχεια θα καθιερωθεί ως ο «κανονικός» για την κατηγορία των γεωμετρικών προβλημάτων που οι αρχαίοι ονόμαζαν «επίπεδα», και επιτυγχάνεται **με χρήση μόνο του κανόνα και του διαβήτη** ή, καλύτερα, με χρήση ευθειών και κύκλων.

2.5 Τα τρία κλασικά προβλήματα της ελληνικής γεωμετρίας

Όμως η ιδέα της ερευνητικής παράδοσης παίρνει σάρκα και οστά κυρίως με το παράδειγμα των τριών κλασικών προβλημάτων που απασχόλησαν επί πολλούς αιώνες τους Έλληνες (και όχι μόνο) μαθηματικούς. Πρόκειται για τα προβλήματα του **τετραγωνισμού του κύκλου**, του **διπλασιασμού του κύβου** και της **τριχοτόμησης της τυχούσας γωνίας**. Η επίδραση που άσκησαν οι προσπάθειες επίλυσης των τριών αυτών προβλημάτων στην εξέλιξη των μαθηματικών είναι τεράστια, γιατί οδήγησαν σε βαθιές και γόνιμες έρευνες. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αρχικά οι μαθηματικοί του 5ου π.Χ. αι. θα προσπαθούσαν μάταια να τα επιλύσουν ώσπου να αντιληφθούν ότι αυτό δεν ήταν δυνατόν να γίνει με χρήση μόνο ευθειών και κύκλων (δηλαδή μόνο με τη χρήση αδιαβάθμητου κανόνα και διαβήτη). Το αδύνατο της επίλυσής τους με τα μέσα αυτά αποδείχθηκε μόλις το 19ο αιώνα. Ωστόσο, Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί θα πρέπει, όπως ήδη αναφέραμε, να το είχαν αντιληφθεί αυτό από πολύ νω-

Χειρόγραφο από τη λατινική μετάφραση των έργων του Αρχιμήδη που εκπόνησε στα τέλη του 13ου αι. ο Γουλιέλμος του Μέρμπεκε (περ. 1215-1297).



ρίς, γι' αυτό και στράφηκαν στην επινόηση κατασκευών που οδηγούσαν σε λύσεις, έστω κι αν οι κατασκευές αυτές δε γίνονταν με κανόνα και με διαβήτη. Από αυτή τη δραστηριότητα προέκυψαν σημαντικά αποτελέσματα μεταξύ των οποίων αξίζει να μνημονεύσουμε τη χρήση των **κωνικών τομών** (δηλαδή της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής). Βρισκόμαστε, λοιπόν, ενώπιον ενός φαινομένου, το οποίο παρατηρείται πολύ συχνά στην ιστορία της επιστήμης. Εννοούμε το φαινόμενο του εποικοδομητικού ρόλου που μπορεί να παίξει η αποτυχία στην εξέλιξη της επιστήμης. Στην προκειμένη περίπτωση, η αποτυχία των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν - στο πλαίσιο της ερευνητικής παράδοσης - για την επίλυση αυτών των στοιχειωδών εκ πρώτης όψεως προβλημάτων οδήγησε στον περαιτέρω εμπλουτισμό και στην εκλέπτυνση των μαθηματικών μεθόδων, των αναλυτικών εργαλείων καθώς και των αποδεικτικών μεθόδων της ελληνικής γεωμετρίας.

Ο Ιπποκράτης ήταν μεταξύ των πρώτων που ασχολήθηκαν με τα προβλήματα του τετραγωνισμού του κύκλου και του διπλασιασμού του κύβου. Η συμβολή του στο πρώτο συνίσταται στο ότι κατόρθωσε να τετραγωνίσει ορισμένους **μηνίσκους** (μηνίσκοι ονομάζονται τα σχήματα που ορίζονται από τα τόξα δύο κύκλων, των οποίων τα κέντρα κείνται ομοπλεύρως προς το ένα τουλάχιστον από τα τόξα). Επειδή δεν έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι οι μηνίσκοι αποτελούσαν κάποιο σχήμα με ιδιαίτερη σημασία για τους Αρχαίους Έλληνες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού τους δεν ήταν παρά ένα μόνο παράδειγμα από μια ολόκληρη κατηγορία προβλημάτων, που αφορούσαν στον τετραγωνισμό διαφόρων καμπυλόγραμμων σχημάτων και, κυρίως, του ίδιου του κύκλου. Η συμβολή του Ιπποκράτη στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου έγκειται στο ότι ανήγαγε το πρό-

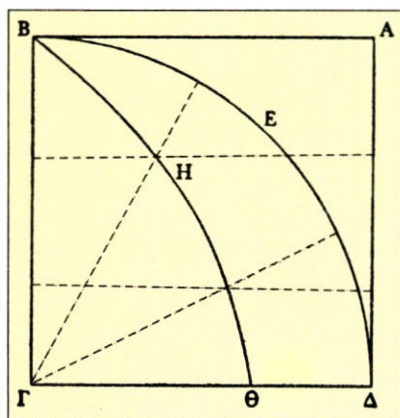
βλημα αυτό στο ισοδύναμο πρόβλημα της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων x και y μεταξύ δύο δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων α και β, έτσι ώστε να ισχύουν

$$\alpha : x = x : y = y : \beta.$$

Στην περίπτωση που $\beta = 2\alpha$, από τις σχέσεις αυτές προκύπτει πράγματι ότι $x^3 = 2\alpha^3$.

Τις λύσεις των τριών κλασικών προβλημάτων που επεξεργάσθηκαν οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί διέσωσαν συγγραφείς της ύστερης αρχαιότητας, όπως ο Πάππος στη *Μαθηματική συναγωγή* του και ο Ευτόκιος (πρώιμος 6ος μ.Χ. αι.) στα σχόλιά του στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη.

2.5.1 Η τριχοτόμηση τυχούσας γωνίας



Η αρχαιότερη γνωστή μέθοδος για την τριχοτόμηση μιας γωνίας είναι αυτή που γίνεται με μία καμπύλη την οποία θα ονομάζουμε ***τριχοτομούσα***. Η κατασκευή της καμπύλης αυτής περιγράφεται από τον Πάππο ως εξής: Ξεκινώντας από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, ας φανταστούμε την ευθεία ΒΑ να μετατοπίζεται παράλληλα με σταθερή ταχύτητα προς τα κάτω μέχρι να συμπέσει με τη ΓΔ και, ταυτόχρονα, την ευθεία ΓΒ να περιστρέφεται ομαλά, μέσα στο τετράγωνο, γύρω από το σταθερό άκρο Γ μέχρι να συμπέσει και αυτή, στον ίδιο χρόνο, με τη ΓΔ. Η τριχοτομούσα είναι η καμπύλη που διαγράφει το σημείο τομής των δύο κινούμενων ευθειών (βλ. σχήμα).

Η κατασκευή της τριχοτομούσας και η χρησιμοποίησή της για την επίλυση του προβλήματος της τριχοτόμησης μιας τυχούσας γωνίας αποδίδεται από ορισμένους ιστορικούς των μαθηματικών στο σοφιστή Ιππία τον Ηλείο (τέλος 5ου π.Χ. αι.), τον οποίο ο Πλάτων στον *Πρωταγόρα* τον παρουσιάζει ως υπέρμαχο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στους τέσσερις κλάδους της ***τετρακτύος*** (αριθμητική, γεωμετρία, μουσική, αστρονομία). Ο Πάππος χρησιμοποιεί για την καμπύλη αυτή την ονομασία ***τετραγωνίζουσα***, λόγω του ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου, αποδίδει δε αυτή την τελευταία εφαρμογή της στους μαθηματικούς Δεινόστρατο (μέσα 4ου π.Χ. αι.) και Νικομήδη (ύστερος 3ος π.Χ. αι.). Φαίνεται, λοιπόν, ότι η καμπύλη επινοήθηκε αρχικά για την επίλυση του προβλήματος της τριχοτόμησης μιας τυχούσας γωνίας και αργότερα δια-

πιστώθηκε ότι η ίδια καμπύλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου.

2.5.2 Ο διπλασιασμός του κύβου

Ενώ για την προέλευση του προβλήματος της τριχοτόμησης της γωνίας δεν υπάρχει καμιά πληροφορία, αντίθετα για τον διπλασιασμό του κύβου υπάρχει ένα πλήθος από λεπτομερείς αφηγήσεις. Δύο από τις αφηγήσεις αυτές, με συγγραφείς τους σχολιαστές Θέωνα το Σμυρναίο και Ευτόκιο, φέρονται να έχουν ως πηγή κείμενα του Ερατοσθένη, διευθυντή της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας τον 3ο π.Χ. αιώνα. Συγκεκριμένα, η αφήγηση του Θέωνα φαίνεται ότι βασίζεται σε ένα χαμένο διάλογο με τον τίτλο *Πλατωνικός*, ενώ ο Ευτόκιος φέρεται να παραθέτει αυτούσια μια επιστολή του Ερατοσθένη προς το βασιλιά Πτολεμαίο. Από τη συνεργασία των ιστορικών των μαθηματικών με επιστήμονες άλλων ειδικοτήτων (φιλολόγους, ιστορικούς, αρχαιολόγους κτλ.) αποδείχθηκε ότι η επιστολή δεν είναι γνήσια (ενδέχεται να μην την έγραψε καν ο Ερατοσθένης), όμως δεν υπάρχει λόγος να αμφιβάλλουμε σχετικά

Η «επιστολή» περιέχει ένα εξαιρετικά σημαντικό τεκμήριο, ένα επίγραμμα του Ερατοσθένη, εν μέρει σε λόγο πεζό, εν μέρει διατυπωμένο έντεχνα σε στίχους. Το επίγραμμα ήταν χαραγμένο σε μια μαρμάρινη πλάκα στο ναό του Πτολεμαίου στην Αλεξάνδρεια και θεωρείται γνήσιο. Το έμμετρο τμήμα του είναι το εξής:

Εάν, ω αγαθέ, θέλεις να επιτύχεις κύβο διπλάσιο ενός μικρού ή θέλεις να μετασχηματίσεις με κομψό τρόπο κάθε άλλο στερεό σώμα, αυτό είναι στο χέρι σου και θα μπορέσεις να μετρήσεις και μάντρα ή λάκκο ή ευρύ κύτος κοίλου πηγαδιού, αν βρεις δύο μέσες αναλόγους, αφού συμπεριλάβεις μεταξύ δύο κανόνων συνδρομείς, οι τομές των οποίων να συγκλίνουν προς τα άκρα των τερμάτων τους. Να μην ζητάς να το πετύχεις αυτό με τα δυσμήχανα έργα των κυλίνδρων του Αρχύτα, ούτε να θέλεις να το βρεις τέμνοντας τον κώνο κατά τις τριάδες του Μεναίχμου, ούτε αν κατασκευάζεται κάποιο είδος καμπύλων γραμμών, όπως περιγράφεται από τον θεοσεβή Εύδοξο. Διότι με αυτή τη συσκευή μπορείς, ξεκινώντας από μια μικρή βάση, να βρεις μυριάδες μέσων αναλόγων ευκολότερα. Είσαι ευτυχής, Πτολεμαίε, διότι, απολαμβάνοντας με το παιδί σου τις νεανικές διασκεδάσεις, συ ο ίδιος χάρισες σ' αυτό όλα όσα είναι αγαπητά και στις μούσες και στους βασιλείς. Σε ό,τι αφορά δε στο μέλλον, ουράνιε Ζευ, μακάρι το παιδί σου να δεχθεί από το χέρι σου και τα σκήπτρα. Και αυτά μεν ας γίνουν έτσι, είθε δε όποιος βλέπει το ανάθημα αυτό να λέει ότι αυτό είναι έργο του Ερατοσθένη του Κυρηναίου.

Βλέπε: *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, τόμ. 1: *From Thales to Euclid*, επιμ. Ivor Thomas, Cambridge, Mass., Harvard University Prees 1991, σελ. 296. (Loeb Classical Library, Αρ. 335)

με την αξιοπιστία των πληροφοριών που περιέχει.

Το πιο σημαντικό περιστατικό στην ιστορία του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου ήταν η αναγωγή του, από τον Ιπποκράτη, στο πρόβλημα της εύρεσης *δύο μέσων αναλόγων*. Πράγματι, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αν κατασκευαστούν δύο μέσες ανάλογοι x και y μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων α και 2α, τότε ο κύβος με πλευρά x θα είναι διπλάσιος του κύβου με πλευρά α. Από τότε που αποδείχθηκε το αποτέλεσμα αυτό, οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί επιδόθηκαν στην προσπάθεια επίλυσης του ισοδύναμου προβλήματος της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων, προκειμένου έτσι να επιτύχουν και την επίλυση του αρχικού προβλήματος, του διπλασιασμού του κύβου.

Διατυπώθηκαν πολλές λύσεις του προβλήματος, άλλες θεωρητικές και άλλες μηχανικές. Στα αποσπάσματα από την «επιστολή» του Ερατοσθένη μνημονεύονται τέσσερις απ' αυτές (του Αρχύτα, του Ευδόξου, του Μέναιχμου και του ίδιου του Ερατοσθένη), ενώ ο συνολικός αριθμός των λύσεων που διασώζει ο σχολιαστής Ευτόκιος ξεπερνά τις δέκα. Η λύση του Μέναιχμου (μαθητή και συνεργάτη του Πλάτωνα) παρουσιάζει μεγάλο ιστορικό ενδιαφέρον, γιατί εγκαινιάζει μια ολόκληρη ερευνητική παράδοση στην ιστορία της γεωμετρίας, που κατέληξε στη διατύπωση της θεωρίας των κωνικών τομών.

2.5.3 Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ήταν πολύ δημοφιλές στην Αθήνα προς το τέλος του 5ου π.Χ. αι., αν κρίνουμε από το γεγονός ότι ακόμη και ο Αριστοφάνης διακωμωδεί στους *Όρνιθες* τις προσπάθειες επίλυσής του. Στην κοινή γλώσσα, μάλιστα, είχε γίνει συνώνυμο του «ακατόρθωτου».

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου έγκειται στην εύρεση της πλευράς ενός τετραγώνου η επιφάνεια του οποίου είναι ίση με την επιφάνεια του κύκλου. Μια ενδιαφέρουσα εξέλιξη στις προσπάθειες επίλυσης αυτού του προβλήματος ήταν η αναγωγή του στο ισοδύναμο πρόβλημα της εύρεσης του μήκους της περιφέρειας. Η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο προβλημάτων δίνεται από τον Αρχιμήδη στη μικρή πραγματεία του με τον τίτλο *Κύκλου μέτρησις*, θεωρείται όμως βέβαιο ότι ήταν γνωστή ήδη από τα μέσα του 4ου π.Χ. αι., όταν ο Δεινόστρατος (αδελφός του Μέναιχμου) έλυσε το πρόβλημα της εύρεσης του μήκους της περιφέρειας, χρησιμοποιώντας την τετραγωνίζουσα, την καμπύλη που περιγράψαμε όταν συζητούσαμε το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας.

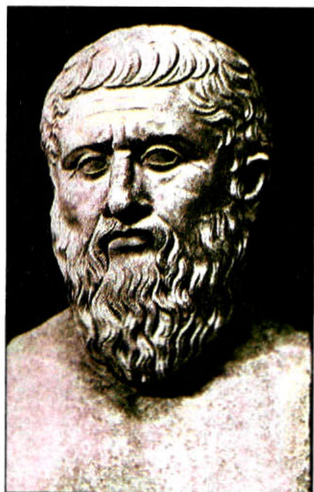
3 Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ ΤΟΝ 4ο π.Χ. ΑΙΩΝΑ

Αν εξαιρέσουμε τα μαθηματικά, εκείνη από τις θετικές, όπως λέμε σήμερα, επιστήμες, η οποία γνώρισε τη μεγαλύτερη άνθηση κατά την ελληνική αρχαιότητα ήταν η αστρονομία· ήταν άλλωστε η μόνη επιστήμη στην οποία ήδη από τα μέσα του 4ου π.Χ. αι. εφαρμόστηκαν, και μάλιστα με αρκετή επιτυχία, μαθηματικές μέθοδοι. Φυσικά, η ιστορία της ελληνικής αστρονομίας δεν αρχίζει τον 4ο π.Χ. αιώνα. Χαρτογράφηση αστέρων και αστερισμών, παρατηρήσεις των κινήσεων των ουράνιων σωμάτων, καθώς και καταγραφή των πάσης φύσεως ουράνιων φαινομένων γίνονταν από πολύ παλιά, τόσο για τη ρύθμιση των ετήσιων αγροτικών εργασιών όσο και για τη σύνταξη ενός ικανοποιητικού ημερολογίου, αλλά ακόμη και για θρησκευτικούς λόγους. Επιπλέον, διατυπώθηκαν και περιγραφές του κόσμου, με πιο ενδιαφέρουσα αυτή που αποδίδεται στο Φιλόλαο, έναν Πυθαγόρειο που έζησε στο δεύτερο μισό του 5ου π.Χ. αιώνα. Την κεντρική θέση στο σύστημα του κόσμου, σύμφωνα με την περιγραφή του Φιλολάου, δεν κατέχει η γη αλλά το *κεντρικόν πυρ* (*εστία*), γύρω από το οποίο περιφέρονται διαγράφοντας κυκλικές τροχιές η γη και τα υπόλοιπα ουράνια σώματα - στα οποία εκτός από τη σελήνη, τον ήλιο, τους πέντε πλανήτες (Ερμή, Αφροδίτη, Άρη, Δία, Κρόνο) και τους απλανείς περιλαμβανόταν και μια αντι-γη (*αντίχθων*). Παρά τα προφανή μειονεκτήματά της η περιγραφή αυτή του κόσμου, συγκρινόμενη με παλαιότερες θεωρίες, αποτελεί αξιοσημείωτη εξέλιξη, γιατί δίνει έμφαση στις κυκλικές κινήσεις των ουράνιων σωμάτων γύρω από ένα κέντρο, απομακρύνει τη γη από το κέντρο του κόσμου και διακρίνει τους πλανήτες από τους απλανείς αστέρες.

Κύριο χαρακτηριστικό των περιγραφών του κόσμου που είχαν διατυπωθεί ώς τις αρχές του 4ου π.Χ. αι. ήταν η απουσία κάθε προσπάθειας να περιγραφούν με ακρίβεια οι παρατηρούμενες κινήσεις (φαινόμενες κινήσεις) των ουράνιων σωμάτων και ιδίως των πλανητών. Αυτό ακριβώς είναι το κρίσιμο σημείο ως προς το οποίο διαφοροποιούνται οι θεωρίες που διατυπώνονται από τον 4ο π.Χ. αι. και μετά. Τώρα αρχίζει σιγά σιγά να διαμορφώνεται ένα είδος μαθηματικής αστρονομίας, με βασικά χαρακτηριστικά:

- Τη μετατόπιση του ενδιαφέροντος από θέματα που αναφέρονται στους αστέρες γενικά (πλανήτες και απλανείς), σε θέματα που αφορούν ιδιαίτερα την κίνηση των πλανητών.
- Τη δημιουργία ενός γεωμετρικού μοντέλου, του μοντέλου των «ομόκεντρων σφαιρών» (βλ. παρακάτω), για την αναπαράσταση τόσο των αστρικών όσο και των πλανητικών κινήσεων.
- Τη διαμόρφωση κριτηρίων που πρέπει να ικανοποιούν οι θεωρίες που φιλοδοξούν να ερμηνεύσουν τις παρατηρούμενες κινήσεις των ουράνιων σωμάτων.

Οι πιο σημαντικές μορφές που συνέβαλαν στη στροφή αυτή της αστρονομίας τον 4ο π.Χ. αι. ήταν ο Πλάτων (429-347 π.Χ.) και, κυρίως, ο σύγχρονος, αν και νεότερός του, Εύδοξος ο Κνίδιος (περ. 390-337 π.Χ.).



Πλάτων.

3.1 Ο ρόλος του Πλάτωνα

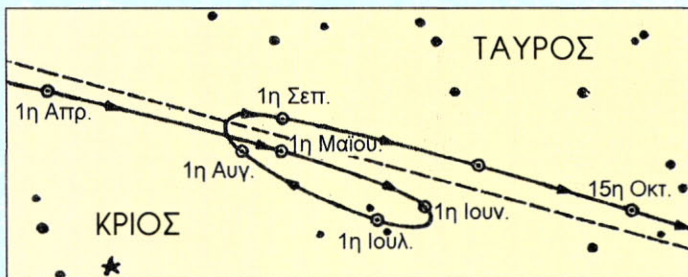
Η συμβολή του Πλάτωνα στην ιστορία της αστρονομίας δεν έγκειται τόσο στις ποικίλες τεχνικές γνώσεις που εκθέτει στους διαλόγους του όσο στις ιδέες που διατυπώνει για τον τύπο των εξηγήσεων που πρέπει να δίνουν οι αστρονόμοι. Δύο είναι τα κύρια στοιχεία που συνθέτουν την παρακαταθήκη του προς τους αστρονόμους της εποχής του: πρώτον, η ριζική διαφορά ανάμεσα στη **μαθηματική** (θεωρητική) και στην **παρατηρησιακή** αστρονομία, και η τοποθέτησή του υπέρ της μαθηματικής αστρονομίας· και δεύτερον, ο προσανατολισμός στο πρόβλημα της εξήγησης της κίνησης των πλανητών ως του πλέον σημαντικού προβλήματος με το οποίο έπρεπε να ασχοληθούν οι αστρονόμοι. Σύμφωνα, μάλιστα, με μια μεταγενέστερη πηγή ο Πλάτων διατύπωσε τους όρους τους οποίους θα έπρεπε να ικανοποιεί μια λύση του προβλήματος αυτού για να είναι αποδεκτή: ***οι φαινόμενες κινήσεις των πλανητών θα έπρεπε να εξηγηθούν μόνο με ομαλές κυκλικές κινήσεις***. Το δεύτερο αυτό σκέλος της παρακαταθήκης του Πλάτωνα επηρέασε την αστρονομία για είκοσι σχεδόν αιώνες, αφού το πρόβλημα της εξήγησης της φαινόμενης κίνησης των πλανητών παρέμεινε το πρόβλημα που κυρίως απασχολούσε τους αστρονόμους ως την εποχή του Νεύτωνα. Αλλά και το δόγμα της χρησιμοποίησης αποκλειστικά και μόνο κυκλικών κινήσεων δεν εγκαταλείφθηκε παρά με τον Κέπλερ, μόλις λίγες δεκαετίες νωρίτερα.

Την εποχή του Πλάτωνα υπήρχε συμφωνία μεταξύ των αστρονόμων ότι οι βασικές κινήσεις στις οποίες συμμετέχουν τα ουράνια σώματα, πλανήτες και απλανείς, και είναι ορατές (με γυμνό μάτι) από έναν επίγειο παρατηρητή, είναι οι εξής:

1. Όλα τα ουράνια σώματα περιστρέφονται γύρω από τη γη, εξ ανατολών προς δυσμάς, σε 24 ώρες περίπου, με αποτέλεσμα να παρατηρείται το καθημερινό φαινόμενο της ανατολής και της δύσης τους.
2. Ο ήλιος μετατοπίζεται σε σχέση με τους αστερισμούς με σχεδόν ομαλή γωνιακή ταχύτητα (όπως θα λέγαμε σήμερα), εκ δυσμών προς ανατολάς, εντός ενός δακτυλίου από

αστερισμούς (των ζωδίων), κινούμενος πάνω σε μια νοητή μαθηματική γραμμή (την εκλειπτική) και συμπληρώνει μια πλήρη περιφορά (δηλαδή επανέρχεται στον ίδιο αστερισμό) σε ένα χρόνο περίπου. Η σελήνη και οι υπόλοιποι πέντε πλανήτες κινούνται και αυτοί στο μέσο των ζωδίων, σε τροχιές που βρίσκονται πολύ κοντά στην τροχιά του ήλιου, και με κατεύθυνση γενικώς εκ δυσμών προς ανατολάς, η περίοδος δε εντός της οποίας συμπληρώνεται μία πλήρης περιφορά ποικίλει από πλανήτη σε πλανήτη.

3. Τέλος, όταν παρατηρεί κανείς τη θέση ενός πλανήτη επί πολλούς μήνες, θα διαπιστώσει την ύπαρξη ανωμαλιών στην εκ δυσμών προς ανατολάς κίνησή του. Οι ανωμαλίες αυτές είναι γνωστές ως *στάσεις, αναδρομήσεις και ορθοδρομήσεις*. Συγκεκριμένα, από καιρού εις καιρόν ο πλανήτης φαίνεται να επιβραδύνει την κίνησή του και κατόπιν να ακινητοποιείται για μερικές μέρες, στη συνέχεια να κινείται ανάδρομα, δηλαδή εξ ανατολών προς δυσμάς, να επιβραδύνει και πάλι την κίνησή του, να σταματά, και στη συνέχεια να ξαναπαίρνει την κανονική πορεία του εκ δυσμών προς ανατολάς.

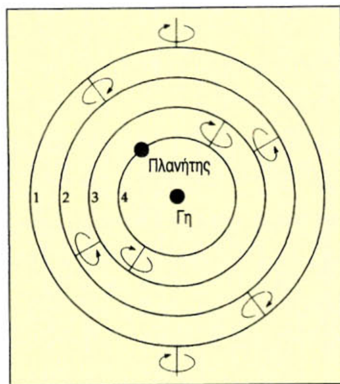


Γραφική αναπαράσταση της φαινομένης τροχιάς του πλανήτη Άρη εν μέσω των αστερισμών του Κριού και του Ταύρου. Η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει την εκλειπτική.

3.2 Το μοντέλο των ομόκεντρων σφαιρών του Ευδόξου

Όπως αναφέραμε ο Πλάτων έθεσε στους αστρονόμους το πρόβλημα σχετικά με τις ομαλές κυκλικές κινήσεις, που θα **«έσωζαν»** τις φαινόμενες κινήσεις των ουράνιων σωμάτων για τις οποίες μιλήσαμε πιο πάνω. Το πρόβλημα ήταν, κυρίως, να επινοηθούν τεχνικές, που θα έδιναν τη δυνατότητα γεωμετρικής περιγραφής της φαινομένης τροχιάς των ουράνιων σωμάτων και ιδιαίτερα της ανώμαλης κίνησης των πλανητών. Η ευφυέστερη από τις λύσεις που προτάθηκαν δόθηκε από τον Εύδοξο και αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα στην ιστορία της αρχαίας ελληνικής επιστήμης.

Η λύση του Ευδόξου περιεχόταν σε ένα από τα χαμένα έργα του με τίτλο *Περί ταχών*, ευτυχώς όμως την περιγράφει με συντομία ο Αριστοτέλης στα *Μετά τα φυσικά* και λεπτομερέστερα ο Σιμπλίκιος στα σχόλια στο *Περί ουρανού* του Αριστοτέλη. Με βάση αυτές τις περιγραφές ο Ιταλός αστρονόμος G.V. Schiaparelli (Σκιαπαρέλι, 1835-



1910) ανακατασκεύασε τον περασμένο αιώνα τη λύση του Ευδόξου και η ανακατασκευή αυτή, η οποία έχει γίνει γενικώς αποδεκτή, είναι σε αδρές γραμμές η ακόλουθη: Η σφαιρική γη βρίσκεται ακίνητη στο κέντρο ενός συστήματος ομόκεντρων σφαιρών, οι οποίες περιστρέφονται ομαλά γύρω από καταλλήλως κεκλιμένους άξονες περιστροφής. Από αυτές, η εξωτερική φέρει τους απλανείς αστέρες, ενώ οι υπόλοιπες χρησιμεύουν για την περιγραφή των πλανητών. Στο διπλανό σχήμα που ακολουθεί φαίνεται πώς είναι αρθρωμένες οι ομόκεντρες σφαίρες ενός τυχόντος πλανήτη.

Ο πλανήτης ο οποίος είναι σταθερά τοποθετημένος στην εσωτερική σφαίρα συμμετέχει στην κίνηση της σφαίρας αυτής. Η σφαίρα αυτή συμμετέχει στην κίνηση της σφαίρας που βρίσκεται από πάνω της κτλ. Έτσι, ο πλανήτης εκτελεί μια σύνθετη κίνηση, από την οποία προκύπτει η φαινόμενη κίνησή του.

Ένα από τα ερωτήματα που θέτουν οι ιστορικοί της επιστήμης είναι αν το μοντέλο του Ευδόξου μπορεί να θεωρηθεί επιτυχημένο. Η απάντηση δεν είναι εύκολη μιας και δεν έχει διασωθεί κανένα έργο του Ευδόξου και, έτσι, δε γνωρίζουμε τις γεωμετρικές λεπτομέρειες του μοντέλου του. Πιστεύεται, πάντως, ότι το μοντέλο δεν είχε σχεδιαστεί με σκοπό την επίτευξη ποσοτικών προγνώσεων (είναι μάλλον απίθανο να είχε εισαχθεί η ιδέα της ακριβούς ποσοτικής πρόγνωσης στην ελληνική αστρονομία εκείνη την εποχή) και οι φιλοδοξίες του δεν ήταν άλλες από την **ποιοτική συμφωνία**, σε γενικές γραμμές, **μεταξύ θεωρίας και παρατηρησιακών δεδομένων**. Και με αυτή την έννοια το μοντέλο του Ευδόξου ήταν εξαιρετικά επιτυχημένο.

3.3 Η πλανητική αστρονομία μετά τον Εύδοξο

Το μοντέλο των ομόκεντρων σφαιρών του Ευδόξου είχε πολύ μεγάλη αποδοχή από τους αστρονόμους της εποχής. Μάλιστα, το επεξεργάστηκε ακόμα περισσότερο ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.). Συγκεκριμένα, ο Αριστοτέλης **απέδωσε φυσική ύπαρξη στο σύστημα των σφαιρών**, μετατρέποντάς το έτσι **από καθαρά γεωμετρική κατασκευή σε μηχανική**.

Το μοντέλο των ομόκεντρων σφαιρών δεν ήταν ικανό να «σώζει» όλα τα φαινόμενα και, ιδιαίτερα, το φαινόμενο της μεταβολής της λαμπρότητας ορισμένων πλανητών. Η «ανωμαλία» αυτή εξηγήθηκε μόνο με τη θεωρία των επικύκλων και των έκ-

κεντρων κύκλων, η οποία όμως διατυπώθηκε αργότερα, τον 3ο π.Χ. αι., στην ελληνιστική περίοδο. Ολοκληρώνοντας στο σημείο αυτό την αφήγησή μας για την πρώιμη ιστορία της ελληνικής αστρονομίας αξίζει να μνημονεύσουμε έναν ακόμη αστρονόμο του 4ου π.Χ. αι., το συνεργάτη του Πλάτωνα και μέλος της Ακαδημίας, τον Ηρακλείδη από τον Πόντο (περ. 390-339 π.Χ.), στον οποίο αποδίδεται η εξαιρετικά ενδιαφέρουσα ιδέα της ημερήσιας περιστροφής της γης γύρω από τον άξονά της. Το ενδιαφέρον αυτής της ιδέας έγκειται στο ότι έτσι μειώνεται ο αριθμός των ουράνιων κινήσεων που πρέπει να εξηγηθούν. Πράγματι, η ημερήσια περιστροφή της γης ερμηνεύει την ημερήσια κίνηση της ουράνιας σφαίρας, την οποία, στο μοντέλο των ομόκεντρων σφαιρών, περιέγραφε η εξωτερική σφαίρα του συστήματος των σφαιρών κάθε πλανήτη. Παρά το ενδιαφέρον της, όμως, η ιδέα του Ηρακλείδη δεν έτυχε ευρύτερης αποδοχής στην αρχαιότητα. Ο λόγος θα πρέπει να αναζητηθεί μάλλον σε αντεπιχειρήματα που διατυπώθηκαν και βασίστηκαν στις θέσεις της επικρατούσας αριστοτελικής φυσικής.

4 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ

Στην ιστορία των επιστημών ο Αριστοτέλης αποτέλεσε, για περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια, μια αυθεντία που παρόμοια δε γνώρισε η δυτική σκέψη. Ιδιαίτερα η διδασκαλία του για την κίνηση και η κοσμολογία του δεν ξεπεράστηκαν οριστικά παρά μόνο το 17ο αιώνα. Στην κοσμολογία του Αριστοτέλη ο κόσμος χωρίζεται σε δύο περιοχές: την υποσελήνια περιοχή και το χώρο πέρα από τη σελήνη. Οι δύο αυτές περιοχές είναι πολύ διαφορετικές μεταξύ τους. Ο χώρος πέρα από τη σελήνη είναι αμετάβλητος και άφθαρτος. Οι κινήσεις των σωμάτων στο χώρο αυτό είναι τέλειες, δηλαδή ομαλές κυκλικές. Αντίθετα, στην υποσελήνια περιοχή κυριαρχούν η φθορά και η αλλαγή, ενώ οι φυσικές κινήσεις των σωμάτων δεν είναι ομαλές κυκλικές. Για τις κινήσεις αυτές ο Αριστοτέλης είχε αναπτύξει μια θεωρία που άσκησε μεγάλη επιρροή και, συνάμα, δέχθηκε πολλές κριτικές.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ «ΚΙΝΗΣΗΣ» ΣΤΟΝ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ

Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί τον όρο «κίνησις» με πολύ ευρύτερη σημασία από αυτή που του αποδίδουμε σήμερα. Για τον Αριστοτέλη ο όρος αυτός μπορεί να σημαίνει:

1. Αλλαγή της ουσίας (*γένεσις* και *φθορά*).
2. Αλλαγή του μεγέθους (*αύξησις* και *φθίσις*).
3. Αλλαγή της ποιότητας (*αλλοίωσις*).
4. Μετατόπιση.

Το θέμα μας σ' αυτή την ενότητα είναι η κίνηση με την τέταρτη σημασία του όρου, δηλαδή η μετατόπιση.

4.1 Η θεωρία της κίνησης στην υποσελήνια περιοχή



Αριστοτέλης. Μαρμάρινο αντίγραφο (30-50 μ.Χ.) ενός παλαιότερου, πιθανώς ορειχάλκινου, αγάλματος που είχε φιλοτεχνηθεί κατά τη διάρκεια της ζωής του φιλοσόφου (γύρω στο 325 π.Χ.).

Η αριστοτελική θεωρία της κίνησης στην υποσελήνια περιοχή βασίζεται σε δύο θεμελιώδεις αρχές:

1η αρχή: Η κίνηση δεν είναι ποτέ αυθόρμητη. Πίσω από κάθε κίνηση ο Αριστοτέλης βλέπει τη επενέργεια μιας ενεργούσας δύναμης (*κινούν*), η οποία βρίσκεται σε συνεχή επαφή με το κινούμενο σώμα.

2η αρχή: Υπάρχουν δύο είδη κίνησης: *η φυσική και η βίαιη κίνηση*. Η *φυσική κίνηση*, δηλαδή η ελεύθερη κίνηση των σωμάτων προς τους *φυσικούς τόπους τους* είναι ευθύγραμμη και η διεύθυνσή της είναι πάντοτε κατακόρυφη. *Η βίαιη (εξαναγκασμένη) κίνηση*, δηλαδή η κίνηση που γίνεται υπό την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης και υποχρεώνει το σώμα να παρεκκλίνει από τη φυσική κίνησή του, μπορεί να είναι και αυτή ευθύγραμμη, η διεύθυνσή της όμως δεν είναι απαραίτητο να είναι πάντοτε κατακόρυφη. Κάθε κίνηση στη γήινη περιοχή του κόσμου είναι ή βίαιη ή φυσική, αλλά η βίαιη αντιτίθεται προς τη φύση και έπεται της φυσικής.

Σε ό,τι αφορά την πρώτη αρχή, ο Αριστοτέλης είχε να αντιμετωπίσει μια προφανή δυσκολία. Έπρεπε να εξηγήσει γιατί σε ορισμένες περιπτώσεις η κίνηση συνεχίζεται ακόμη και όταν το κινούμενο σώμα χάσει την επαφή του με το κινούν. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι, λ.χ., αυτό του εξακοντιζόμενου βέλους το οποίο εκτοξεύεται οριζόντια, οπότε εκτελεί εξαναγκασμένη κίνηση, και δε σταματά να κινείται αμέσως μόλις χάσει την επαφή του με τη χορδή του τόξου που το εκτόξευσε. Η απάντηση για τον Αριστοτέλη βρίσκεται στη θεωρία της ***«αντιπερίστασης»***, σύμφωνα με την οποία το μέσον εντός του οποίου διενεργείται η κίνηση αναλαμβάνει το ρόλο του κινούντος: όταν εκτοξεύουμε ένα βέλος διεγείρουμε ταυτόχρονα το περιβάλλον μέσο, μεταδίδοντάς του τη δύναμη να συνεχίσει να δρα επί του βέλους κινώντας το (με τη διαφορά ότι όσο περισσότερο απομακρύνεται η δύναμη από την αρχική πηγή της τόσο περισσότερο εξαντλείται). Πρόκειται για μια απάντηση απολύτως συνεπή με την αρχή ότι δεν υπάρχει κίνηση χωρίς τη συνεχή επενέργεια του κινούντος.

Ας δούμε τώρα, πώς με βάση τις δύο αυτές αρχές πραγματεύεται ο Αριστοτέλης τόσο τη φυσική όσο και την εξαναγκασμένη κίνηση.

4.1.1 Η φυσική κίνηση

Ποιο είναι το κινούν στην περίπτωση της φυσικής κίνησης; Το κινούν, στην περίπτωση της φυσικής κίνησης, είναι η *φύση* του σώματος εξ αιτίας της οποίας το κάθε σώμα έχει - κατά τον Αριστοτέλη - την τάση να κινείται προς το **φυσικό τόπο** του, ώσπου, όταν φτάσει σ' αυτόν, να παραμείνει για πάντα σε ηρεμία.

Πώς πραγματεύεται, όμως, ο Αριστοτέλης το πρόβλημα των φυσικών τόπων; Οι απόψεις του συνοψίζονται στα παρακάτω σημεία: η γήινη (υποσελήνια) περιοχή του κόσμου καλύπτεται πλήρως από τα τέσσερα γήινα στοιχεία: τη γη, το νερό, τον αέρα και τη φωτιά. Το καθένα από τα στοιχεία αυτά είναι *βαρύ* ή *ελαφρύ*. Συγκεκριμένα, η γη και το νερό έχουν την ιδιότητα του βαρέως (με τη γη να είναι βαρύτερη σε σύγκριση με το νερό), ενώ ο αέρας και η φωτιά έχουν την ιδιότητα του ελαφρού (με τη φωτιά να είναι ελαφρύτερη σε σύγκριση με τον αέρα). Επειδή η γη και το νερό είναι βαριά, η φύση τους είναι να κατέρχονται προς το κέντρο του κόσμου και, αντιστοίχως, επειδή ο αέρας και η φωτιά είναι ελαφρά, η φύση τους είναι να ανέρχονται προς την περιφέρεια της γήινης περιοχής του κόσμου, δηλαδή προς το εσωτερικό κέλυφος της σφαίρας στην οποία βρίσκεται η σελήνη. Σε μια ιδανική περίπτωση (δηλαδή, αν δεν υπήρχαν εμπόδια, αν δεν υπήρχαν ανάμικτα σώματα παρά μόνο τα τέσσερα στοιχεία σε πλήρη καθαρότητα και, ακόμη, αν τα τέσσερα στοιχεία είχαν ολοκληρώσει τις φυσικές κινήσεις τους) στη γήινη περιοχή του κόσμου θα διαμορφώνονταν τέσσερις ομόκεντρες σφαίρες, στην καθεμία από τις οποίες θα είχε καταλήξει και θα βρισκόταν σε κατάσταση ηρεμίας το καθένα από τα τέσσερα στοιχεία. Οι σφαίρες αυτές θα ήταν κατά σειρά (από μέσα προς τα έξω) οι εξής: η σφαίρα της γης, η σφαίρα του νερού, η σφαίρα του αέρα και η σφαίρα της φωτιάς. Αυτές οι τέσσερις σφαίρες, λοιπόν, είναι οι *φυσικοί τόποι* προς τους οποίους, από τη φύση τους, κινούνται όλα τα σώματα.

Δύο είναι, για τον Αριστοτέλη, οι **κανόνες** που ρυθμίζουν τη συμπεριφορά ενός σώματος στην περίπτωση της φυσικής κίνησης:

1. Όταν δύο σώματα διαφορετικού βάρους πέφτουν ελεύθερα, τα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται για να καλυφθεί μια δεδομένη απόσταση είναι αντιστρόφως ανάλογα των βαρών τους (ένα σώμα με το διπλάσιο βάρος σε σχέση με ένα άλλο χρειάζεται για την κάλυψη ίσης απόστασης το μισό χρόνο σε σύγκριση με εκείνο).
2. Αν σώματα του ίδιου βάρους κινούνται με φυσική κίνηση σε μέσα με διαφορετικές πυκνότητες, τα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται για να διανυθεί μια δεδομένη απόσταση είναι ανάλογα προς τις πυκνότητες των αντίστοιχων μέσων (όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα τόσο πιο αργά κινείται το σώμα).

4.1.2 Η εξαναγκασμένη κίνηση

Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης κίνησης το κινούν είναι μια εξωτερική δύναμη η οποία υποχρεώνει το σώμα να κινηθεί *παρά φύσιν*, δηλαδή σε κάποια διεύθυνση που το απομακρύνει από το φυσικό τόπο του. Η εξαναγκασμένη κίνηση παύει, όταν παύσει η ενέργεια της εξωτερικής δύναμης.

Οι *κανόνες* που διέπουν τη συμπεριφορά ενός σώματος που εκτελεί εξαναγκασμένη κίνηση είναι, για τον Αριστοτέλη, οι εξής:

Αν μια δεδομένη δύναμη F κινεί ενάντια στη φύση του ένα σώμα βάρους B κατά μια απόσταση Γ εντός χρόνου Δ, τότε:

1. Η ίδια δύναμη F θα μετακινήσει ένα σώμα βάρους $\frac{B}{2}$ στον ίδιο χρόνο Δ σε απόσταση 2Γ.

2. Η μισή δύναμη $\frac{F}{2}$ θα μετακινήσει το σώμα βάρους Β στο χρόνο Δ κατά απόσταση $\frac{\Gamma}{2}$.

3. Η μισή δύναμη $\frac{F}{2}$ θα μετακινήσει ένα σώμα βάρους $\frac{B}{2}$ στο χρόνο Δ κατά απόσταση Γ.

Ο Αριστοτέλης προϋπέθετε ότι κάθε κίνηση πρέπει να πραγματοποιείται εντός ενός μέσου. Με βάση αυτό και πιστεύοντας ότι η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της πυκνότητας του μέσου, οδηγήθηκε στην απόρριψη της δυνατότητας κίνησης στο κενό - αφού η πυκνότητα του κενού είναι μηδέν, η ταχύτητα θα γινόταν απείρως μεγάλη (πράγμα αδύνατο) - και στην απόρριψη της ίδιας της ύπαρξης του κενού στο φυσικό κόσμο.

Οι παραπάνω κανόνες του Αριστοτέλη δεν έρχονται σε τόσο μεγάλη αντίθεση με τα δεδομένα της παρατήρησης. Αντίθετα, φαίνονται αρκετά εύλογοι. Ας το δούμε αυτό λίγο πιο προσεκτικά. Ο Αριστοτέλης συνδέει την κινητική συμπεριφορά ενός σώματος σε ελεύθερη πτώση (φυσική κίνηση) με το βάρος του - ισχυρίζεται, δηλαδή, ουσιαστικά ότι η ταχύτητα είναι ανάλογη του βάρους. Στην ελεύθερη πτώση στο κενό, αυτό, όπως ξέρουμε, δεν ισχύει. Όταν όμως η ελεύθερη πτώση διενεργείται εντός ενός μέσου, π.χ. εντός του αέρα, τα βαρύτερα σώματα πέφτουν πράγματι με μεγαλύτερη ταχύτητα από τα ελαφρότερα που έχουν το ίδιο σχήμα και τις ίδιες διαστάσεις. Αυτό είναι ένα πραγματικό δεδομένο της παρατήρησης. Ο Αριστοτέλης, λοιπόν, δεν είχε άδικο όταν συνέδεε το βάρος με την ταχύτητα στην περίπτωση της κίνησης που πραγματοποιείται εντός ενός μέσου. Σωστή είναι επίσης η διαπίστωση του Αριστοτέλη ότι η κίνηση εντός ενός πυκνού μέσου είναι πιο αργή από την κίνηση εντός ενός μέσου πιο αραιού. Και εδώ, βεβαίως, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι δεν είναι ακριβής ο προσδιορισμός της σχέσης ταχύτητας και πυκνότητας ως σχέσης

ποσών αντιστρόφως αναλόγων.

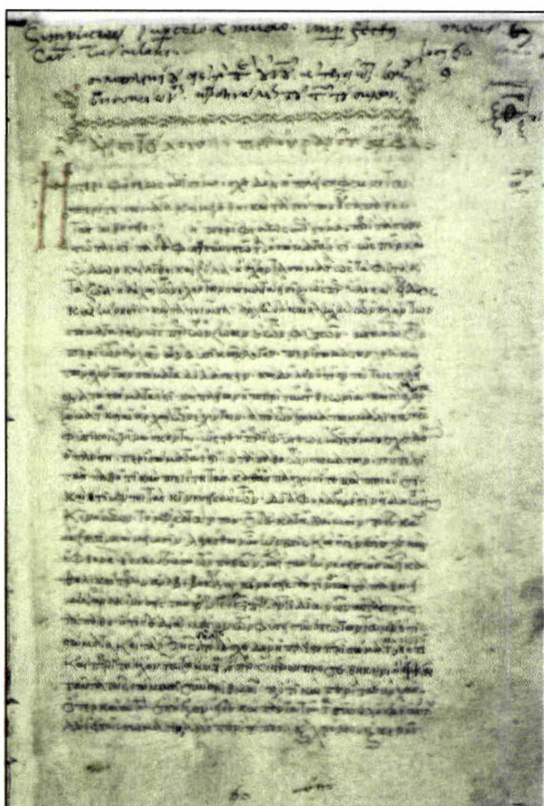
Η αριστοτελική δυναμική, λοιπόν, δεν παρέλειψε να λάβει υπόψη της τα δεδομένα της εμπειρίας. Όλα τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ο Αριστοτέλης για να μελετήσει την κίνηση είναι πραγματικά παραδείγματα, δηλαδή παραδείγματα από τον κόσμο της εμπειρίας, από το φυσικό κόσμο. Ένα παράδειγμα, λ.χ., που χρησιμοποιεί είναι αυτό ενός πλοίου που ρυμουλκείται στη θάλασσα: το πλοίο ρυμουλκείται πολύ πιο εύκολα, όταν είναι άδειο (άρα, η ταχύτητά του είναι αντιστρόφως ανάλογη του βάρους), και επίσης η ταχύτητά του αυξάνεται, όταν ρυμουλκείται από περισσότερα του ενός ρυμουλκά (άρα, η ταχύτητα είναι ανάλογη της κινητήριας δύναμης).

Ωστόσο, οι μεταγενέστεροι θεωρητικοί άσκησαν κριτική στον Αριστοτέλη. Έτσι, όπως θα δούμε αργότερα, τον 6ο μ.Χ. αι., ο Ιωάννης Φιλόπονος θα παρουσιάσει μια σειρά από εμπειρικά επιχειρήματα, για να απορρίψει τη διδασκαλία ότι η ταχύτητα ενός σώματος σε ελεύθερη πτώση είναι ευθέως ανάλογη του βάρους του.

4.2 Οι κινήσεις των ουράνιων σωμάτων

Όπως είπαμε, η γη, το νερό, ο αέρας και η φωτιά είναι, κατά τον Αριστοτέλη, η πρώτη ύλη από την οποία αποτελείται καθετί που υπάρχει πάνω στη γη. Αντίθετα, υποστήριζε, τα ουράνια σώματα δεν αποτελούνται από τα τέσσερα αυτά στοιχεία αλλά από ένα πέμπτο στοιχείο, μια πέμπτη ουσία (*πεμπτουσία*) - τον αιθέρα.

Η θεωρία του Αριστοτέλη για τον αιθέρα έγινε αντικείμενο των πιο πολλών επικρίσεων και χλευασμών από κάθε άλλη θεωρία της αρχαίας επιστήμης. Έχει, λοιπόν, ιδιαίτερο ενδιαφέρον να εξετάσου-



Ελληνικό χειρόγραφο του 14ου αι. με το σχόλιο του Σιμπλίκιου στο Περί ουρανού *του Αριστοτέλη.*

με τους λόγους που επέβαλαν στον Αριστοτέλη να την προτείνει. Το πρόβλημα, όπως το έβλεπε ο ίδιος, ήταν να ερμηνευθούν οι ιδιαίτερου είδους φυσικές κινήσεις των ουράνιων σωμάτων, τα οποία μεταφέρονται κυκλικά εκτελώντας ομαλές κυκλικές τροχιές. Πώς, όμως, θα μπορούσαν να εξηγηθούν αυτές οι αιώνιες και απαράλλακτες κυκλικές κινήσεις των ουράνιων σωμάτων;

Η φυσική κίνηση των τεσσάρων (γήινων) στοιχείων είναι να κατευθύνονται προς τα πάνω ή προς τα κάτω, να απομακρύνονται ή να πλησιάζουν προς το κέντρο της γης. Μπορούν, βεβαίως, να κινούνται και προς άλλες κατευθύνσεις, όπως όταν εκτοξεύεται ένα βαρύ σώμα στο αέρα, για παράδειγμα μια πέτρα. Όμως, αυτή η κίνηση δεν είναι φυσική, είναι βίαιη, εξαναγκασμένη, και ως τέτοια απαιτεί την ύπαρξη μιας κινητήριας δύναμης. Η κίνηση, τώρα, των ουράνιων σωμάτων είναι αιώνια. Άρα δεν μπορεί να είναι βίαιη κίνηση. Πρέπει, επομένως, να είναι φυσική κίνηση. Εδώ βρίσκεται το κύριο θεωρητικό επιχείρημα του Αριστοτέλη: ένα σώμα του οποίου η φυσική κίνηση είναι η κυκλική κίνηση δε μπορεί να ταυτίζεται με κανένα από τα τέσσερα (γήινα) στοιχεία ούτε να είναι κάποιος συνδυασμός αυτών των στοιχείων, γιατί οι φυσικές κινήσεις αυτών των στοιχείων είναι να πηγαίνουν προς τα πάνω ή προς τα κάτω· και αν κάποτε συμβαίνει να κινούνται κυκλικά, όπως για παράδειγμα όταν περιστρέφουμε μια πέτρα δεμένη σε ένα σχοινί, η κίνηση αυτή δεν είναι φυσική, είναι βίαιη (εξαναγκασμένη). Κατά συνέπεια, συμπεραίνει ο Αριστοτέλης, πρέπει να υπάρχει ένα άλλο στοιχείο, ένα πέμπτο στοιχείο, η φυσική συμπεριφορά του οποίου είναι να κινείται εκτελώντας συνεχώς κυκλική κίνηση. Αυτό είναι το κύριο θεωρητικό επιχείρημα που χρησιμοποιεί ο Αριστοτέλης για να υποστηρίξει την ύπαρξη του αιθέρα.

Πολλοί φιλόσοφοι μετά τον Αριστοτέλη αντιμετώπισαν διάφορες δυσκολίες με τη θεωρία του πέμπτου στοιχείου. Θα ολοκληρώσουμε, λοιπόν, την ενότητα αυτή απαριθμώντας ορισμένες από τις δυσκολίες αυτές:

1. Η θεωρία δεν εξηγούσε τι συμβαίνει στο σύνορο των δύο κόσμων, του γήινου (ή υποσελήνιου) και του κόσμου των ουράνιων σφαιρών. Ακριβώς πάνω από τη σφαίρα της σελήνης - που αποτελεί το σύνορο των δύο κόσμων - τα τέσσερα γήινα στοιχεία παραχωρούν τη θέση τους στο πέμπτο στοιχείο, τον αιθέρα. Πώς, όμως, γίνεται η μετάβαση από την κίνηση προς τα πάνω ή προς τα κάτω, που είναι η φυσική κίνηση που επικρατεί στην υποσελήνια περιοχή των τεσσάρων γήινων στοιχείων, στην κυκλική κίνηση, που είναι η φυσική κίνηση του αιθέρα;

2. Ένα δεύτερο πρόβλημα, στο οποίο η θεωρία για τον αιθέρα δεν έδινε ικανοποιητική απάντηση, ήταν αυτό της μετάδοσης θερμότητας από τον ήλιο, ο οποίος, ως ουράνιο σώμα, αποτελείται μόνο από αιθέρα (που δε χαρακτηρίζεται από την ποιότητα «θερμό»).

3. Το τρίτο πρόβλημα δε συνδέεται με τον αιθέρα αυτόν καθαυτόν - ως συστατικό στοιχείο της ουράνιας περιοχής του κόσμου - αλλά με τον ίδιο τον χωρισμό του κόσμου

σε δύο περιοχές - την υποσελήνια και την ουράνια. Όπως ξέρουμε, ο Αριστοτέλης απέδιδε φυσική υπόσταση στο μοντέλο των ομόκεντρων σφαιρών του Ευδόξου. Για να το πετύχει αυτό, είχε εισαγάγει στο σύστημα ορισμένες πρόσθετες σφαίρες, η λειτουργία των οποίων ήταν να μηδενίζουν την επίδραση των κινήσεων των εξωτερικών σφαιρών. Ταυτόχρονα, όμως, ο Αριστοτέλης δεχόταν ότι ορισμένα φαινόμενα που συμβαίνουν στην υποσελήνια περιοχή έχουν τις αιτίες τους στην ουράνια περιοχή. Ένα τέτοιο φαινόμενο είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας στις διάφορες εποχές του χρόνου. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην επίδραση του ήλιου. Πώς γίνεται, όμως, να συμβαίνει αυτό, αφού ανάμεσα στη γη και στον ήλιο παρεμβάλλεται η σελήνη με το δικό της σύστημα σφαιρών, στις οποίες περιλαμβάνονται και οι σφαίρες που μοναδικό σκοπό έχουν να μηδενίζουν τις επιδράσεις των εξωτερικών σφαιρών, άρα και της σφαίρας του ήλιου;

5 ΤΟ ΑΠΟΓΕΙΟ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Από τις αρχές του 3ου π.Χ. αι. η πνευματική εστία του ελληνόφωνου κόσμου δεν είναι πια η Αθήνα αλλά η Αλεξάνδρεια της σημερινής Αιγύπτου, η πιο σημαντική από τις δεκαέξι πόλεις με αυτό το όνομα που ίδρυσε ο Μέγας Αλέξανδρος. Αν και η Αίγυπτος ήταν το μικρότερο από τα τρία βασίλεια στα οποία μοιράστηκε η αυτοκρατορία του Αλεξάνδρου μετά το θάνατό του το 323 π.Χ., πολύ γρήγορα έγινε το πλουσιότερο και καλύτερα διοικούμενο. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στους τρεις πρώτους βασιλείς της δυναστείας των Πτολεμαίων (Σωτήρ, Φιλάδελφος και Ευεργέτης), που διαδέχθηκαν ο ένας τον άλλον από το 305 ως το 221 π.Χ. Επί Πτολεμαίου του Α΄ η Αλεξάνδρεια έγινε πρωτεύουσα της Αιγύπτου. Η διοίκησή της από τους Πτολεμαίους είχε ως αποτέλεσμα να εξελιχθεί η πόλη αυτή σε πολιτιστικό κέντρο και να γίνει για πολλούς αιώνες η σπουδαιότερη εστία επιστημονικής δραστηριότητας σε ολόκληρο τον τότε γνωστό κόσμο.

Η μεταφορά του κέντρου της επιστημονικής δραστηριότητας στην Αλεξάνδρεια είναι κάτι περισσότερο από μια απλή γεωγραφική μετατόπιση. Εκφράζει πρωτίστως μια αλλαγή στο όλο πνευματικό κλίμα, αλλαγή τόσο βαθιά, ώστε οι ιστορικοί αναφέρονται στην περίοδο που εγκαινιάζεται τον 3ο π.Χ. αι. χρησιμοποιώντας την ονομασία **ελληνιστική περίοδος**. Στην ελληνιστική περίοδο οι πνευματικοί και πολιτιστικοί δεσμοί μεταξύ των Ελλήνων και των λαών που κατοικούν στις κατακτημένες περιοχές αναπτύσσονται, η καλλιέργεια των γραμμάτων και των επιστημών γίνεται αντικείμενο κρατικής μέριμνας, η επιστημονική δραστηριότητα διευρύνεται θεματικά και εξειδικεύεται, ενώ το καλλιεργημένο κοινό στο οποίο απευθύνεται είναι πλέον πιο περιορισμένο και εντοπίζεται, κυρίως, στους ειδικούς των βασιλικών και πριγκιπικών αυλών της Αλεξάνδρειας, των Συρακουσών, της Σελεύκειας και των άλλων μεγάλων πόλεων της αχανούς πρώην ενιαίας αυτοκρατορίας.

Αντιπροσωπευτικά της νέας αυτής πνευματικής ατμόσφαιρας είναι δύο φημισμένα ιδρύματα, που θεμελιώθηκαν στην Αλεξάνδρεια από τους δύο πρώτους Πτολεμαίους, το Μουσείο και η Βιβλιοθήκη. Το ***Μουσείο*** (δηλαδή: Ναός των Μουσών) ιδρύθηκε περί το 280 π.Χ. από τον Πτολεμαίο τον Β΄, στο πνεύμα του Λυκείου του Αριστοτέλη, και σύντομα συγκέντρωσε στις τάξεις του τους κορυφαίους γραμματικούς, ιστορικούς, ποιητές, μηχανικούς, αρχιτέκτονες, γεωγράφους, αστρονόμους, μαθηματικούς, ανατόμους και φυσιολόγους απ' όλο τον κόσμο, έχοντας εξασφαλίσει γενναιόδωρη χρηματοδότηση από τους βασιλικούς θησαυρούς. Αποτελεί το πρώτο παράδειγμα στην ιστορία ανώτατου εκπαιδευτικού και ερευνητικού ιδρύματος, που λειτούργησε με δημόσια ή βασιλική δαπάνη, εξακολούθησε δε να λειτουργεί ως τον 5ο μ.Χ. αιώνα. Η ***Βιβλιοθήκη***, εξάλλου, η οποία είχε ιδρυθεί νωρίτερα από τον Πτολεμαίο τον Α΄, αναπτύχθηκε ταχύτατα και έγινε η μεγαλύτερη βιβλιοθήκη της αρχαιότητας, περιλαμβάνοντας στο απόγειό της περισσότερους από 400.000 κυλίνδρους παπύρου. Μόνο ο κατάλογος της Βιβλιοθήκης καταλάμβανε το 250 π.Χ. 120 κυλίνδρους. Η Βιβλιοθήκη γνώρισε πολλές καταστροφές κατά τη διάρκεια διαφόρων πολέμων, μερικά τμήματά της, ωστόσο, παρέμειναν ανέπαφα ως τον 4ο μ.Χ. αιώνα.

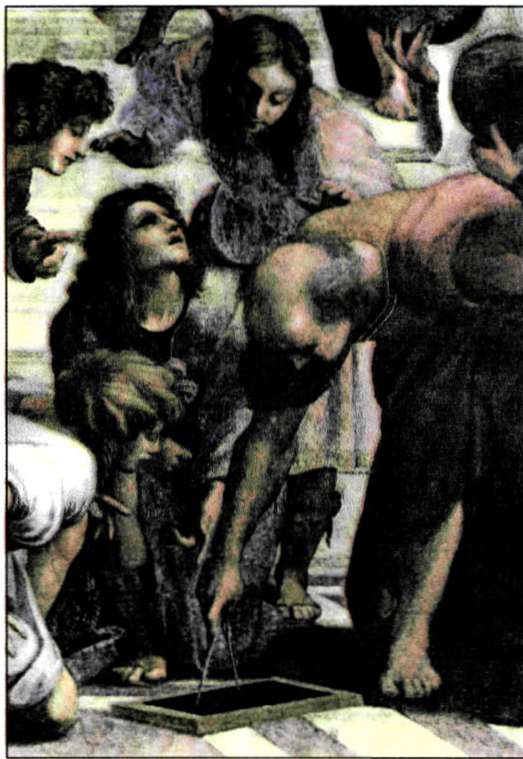
5.1 Τα ελληνιστικά μαθηματικά

Σύμφωνα με όσα είπαμε πιο πάνω, με την έλευση του 3ου π.Χ. αι. τα ελληνικά μαθηματικά εισέρχονται σε μια νέα περίοδο. Τώρα, οι πηγές που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ασύγκριτα πλουσιότερες και πληρέστερες απ' ότι παλαιότερα και, το κυριότερο, τα μαθηματικά που παράγονται είναι πολύ πιο ώριμα και αυστηρά συγκροτημένα σε σύγκριση με την προηγούμενη περίοδο. Ιδιαίτερα ο 3ος π.Χ. αι. μπορεί να χαρακτηριστεί ως ο «χρυσός αιώνας» των ελληνικών μαθηματικών, καθώς λαμπρύνεται με την παρουσία τριών από τους πιο μεγαλοφυείς μαθηματικούς όλων των εποχών, του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα ασχοληθούμε με μερικές βασικές πλευρές του έργου αυτών των τριών μαθηματικών.

5.1.1 *Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη*

Τα *Στοιχεία* είναι το πιο φημισμένο σύγγραμμα στην ιστορία των μαθηματικών και ένα από τα σπουδαιότερα συγγράμματα της παγκόσμιας γραμματείας. Είναι το έργο που έχει γνωρίσει τις περισσότερες εκδόσεις από κάθε άλλο έργο εκτός από τη Βίβλο, και ένας ολόκληρος κόσμος έμαθε γεωμετρία απ' αυτό. Για τη ζωή του συγγραφέα αυτού του έργου γνωρίζουμε ελάχιστα πράγματα. Ξέρουμε ότι δίδαξε στην

Αλεξάνδρεια και ότι ήταν μεγαλύτερος σε ηλικία από τον Αρχιμήδη, πράγμα που σημαίνει ότι η χρονολόγησή του «γύρω στο 300 π.Χ.» δεν πρέπει να απέχει πολύ από την αλήθεια. Ο Πρόκλος, επίσης, αναφέρει ότι ο Ευκλείδης ήταν σύγχρονος του βασιλιά Πτολεμαίου του Α΄, στον οποίο είχε το θάρρος να πει κατά πρόσωπο πως «δεν υπάρχει βασιλική οδός προς τη γεωμετρία». Ο Πάππος, εξάλλου, τον επαινεί για την ηθική του ακεραιότητα, για τη μετριοφροσύνη του και για την ευμενή στάση του προς όσους ήταν ικανοί να προαγάγουν τη μαθηματική γνώση. Ο Στοβαίος, τέλος, διηγείται το ακόλουθο ενδιαφέρον περιστατικό: ένας νέος επισκέφθηκε κάποτε τον Ευκλείδη και τον παρακάλεσε να τον διδάξει γεωμετρία. Μόλις, όμως, έμαθε το πρώτο θεώρημα, ρώτησε τον Ευκλείδη: «Και τώρα τι θα κερδίσω με το θεώρημα αυτό;» Ο Ευκλείδης, τότε, γύρισε προς τον υπηρέτη του και του είπε: «Δώσε του τρεις δεκάρες, ώστε να κερδίσει κάτι από το θεώρημα το οποίο έμαθε!» Αυτά είναι όλα όσα γνωρίζουμε για τον άνθρωπο. Πολύ μεγαλύτερη σημασία, όμως, έχει το έργο του, το οποίο, ακόμη και σήμερα, μαρτυρεί τα απαράμιλλα χαρίσματά του ως δασκάλου.



Ευκλείδης. Λεπτομέρεια από τον πίνακα «Η σχολή των Αθηνών» του Ραφαήλ.

Ο κατάλογος των έργων του Ευκλείδη είναι μακρύς, εκείνο όμως που του εξασφάλισε την αθανασία είναι τα *Στοιχεία* (ή καλύτερα *Στοιχείωσις*, όπως πρέπει να ήταν ο πραγματικός τίτλος). Το έργο αποτελείται από 13 βιβλία (κεφάλαια) και μπορεί να χωριστεί σε επιμέρους ενότητες. Έτσι, τα δύο πρώτα βιβλία πραγματεύονται την κατασκευή και τις ιδιότητες των βασικών ευθύγραμμων σχημάτων και τα κύρια αποτελέσματα που περιέχουν είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα (Ι.47) και ο τετραγωνισμός τυχόντος πολυγώνου (ΙΙ.14). Τα βιβλία ΙΙΙ και IV πραγματεύονται τις ιδιότητες του κύκλου και των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων. Το βιβλίο V είναι αφιερωμένο στη θεωρία αναλογιών επί γεωμετρικών μεγεθών, η οποία στο επόμενο βιβλίο (VI) εφαρμόζεται στην ομοιότητα των επίπεδων σχημά-



Ελληνικό χειρόγραφο του 9ου αι., που περιέχει τα Στοιχεία *του Ευκλείδη. Στη σελίδα δεξιά διακρίνεται το σχήμα της πρότασης Ι.47 (Πυθαγόρειο θεώρημα). Το περιθώριο του χειρογράφου καλύπτεται από σχόλια γραμμένα από διάφορους σχολιαστές (όπως μπορούμε να καταλάβουμε από τη διαφορά στους γραφικούς χαρακτήρες).*

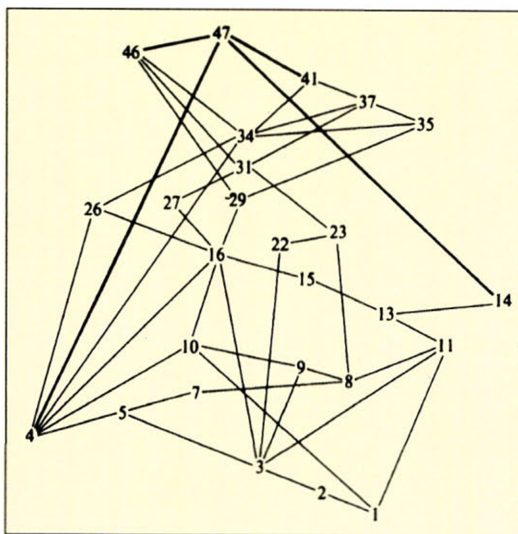
των. Τα τρία βιβλία που ακολουθούν (VII, VIII, IX) περιέχουν τη θεωρία των αριθμών, ενώ το βιβλίο X, που είναι το ογκωδέστερο όλων, πραγματεύεται την ασυμμετρία και την ταξινόμηση των ασύμμετρων μεγεθών. Τέλος, τα βιβλία XI-XIII περιλαμβάνουν τη γεωμετρία του χώρου και περιέχουν μεταξύ άλλων τις μεθόδους εύρεσης των όγκων του κυλίνδρου και του κώνου και τις κατασκευές των κανονικών πολυέδρων.

Μεγάλο μέρος του περιεχομένου των *Στοιχείων* οφείλεται σε εργασίες μαθηματικών προγενέστερων του Ευκλείδη. Έτσι, η θεωρία των αναλογιών του πέμπτου βιβλίου οφείλεται στον Εύδοξο· σ' αυτόν οφείλονται, επίσης, οι εφαρμογές της μεθόδου της εξάντλησης για την απόδειξη των κανόνων που αναφέρονται στην εύρεση των όγκων της πυραμίδας και του κώνου και περιέχονται στο δωδέκατο βιβλίο. Στο Θεαίτητο (περ. 417-369 π.Χ.) οφείλονται η ταξινόμηση των ασύμμετρων μεγεθών του δεκάτου βιβλίου και μέρος του περιεχομένου του δέκατου τρίτου. Πολλά από τα αριθμητικά θεωρήματα των βιβλίων VII-IX ήταν γνωστά στους Πυθαγορείους. Τέλος, πολλά θεωρήματα των τεσσάρων πρώτων βιβλίων ήταν γνωστά στον Ιπποκράτη τον Χίο. Η συμβολή του ίδιου του Ευκλείδη βρίσκεται στην τελειοποίηση μερικών αποδείξεων, κυρίως, όμως, έγκειται στη γενική οργάνωση του έργου. Το αποτέ-

λεσμα είναι μια σύνθεση που χαρακτηρίζεται από υψηλό βαθμό μεθοδικότητας και συνέπειας, και αποτέλεσε εφεξής το υπόδειγμα για τη συγγραφή κάθε έργου, όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και σε άλλες επιστήμες.

Τα *Στοιχεία* είναι το αρχαιότερο σωζόμενο παράδειγμα έργου που με μεγάλη συνέπεια είναι γραμμένο με **αξιωματική-παραγωγική μορφή**· όλες δηλαδή οι προτάσεις (θεωρήματα και προβλήματα κατασκευών) που περιέχει μπορούν να εξαχθούν με παραγωγικό συλλογισμό από λίγες τον αριθμό *πρώτες αρχές*, χρησιμοποιούνται δε σε αυτό τρία είδη τέτοιων αρχικών προτάσεων, οι ***ορισμοί***, τα ***αιτήματα*** και τα ***αξιώματα*** (που ο Ευκλείδης αποκαλεί ***κοινές έννοιες***).

Για να καταλάβουμε τι σημαίνει αξιωματική-παραγωγική μορφή και να δούμε τι είναι αυτό που τελικά κατόρθωσε ο Ευκλείδης, αρκεί να διαβάσουμε προσεκτικά μια πρόταση από τα *Στοιχεία*, επισημαίνοντας σε κάθε βήμα της απόδειξης τις προηγούμενες προτάσεις που χρησιμοποιούνται, στη συνέχεια τις προτάσεις που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις αυτών των προτάσεων και ούτω καθεξής. Αν το κάνουμε αυτό, λ.χ., στην περίπτωση της πρότασης Ι.47 (Πυθαγόρειο θεώρημα), θα διαπιστώσουμε ότι η δομή της απόδειξής της είναι όπως αυτή που συνοψίζεται στο ακόλουθο λογικό διάγραμμα (όπου οι αριθμοί δηλώνουν τις αντίστοιχες προτάσεις του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* - το διάγραμμα έχει ληφθεί από το φυλλάδιο με τίτλο «The Greek Concept of Proof» της σειράς ΜΑ290: Topics in the History of Mathematics, του αγγλικού Ανοικτού Πανεπιστημίου):



Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται κατ' αρχάς ότι η λογική δομή της απόδειξης του συγκεκριμένου θεωρήματος δεν είναι μια απλή γραμμική πορεία αλλά μια πυκνή και περίπλοκη συναρμογή κρίκων της συμπερασματικής αλυσίδας. Βλέπουμε, επίσης, ότι η προς τα κάτω πορεία των κρίκων της συμπερασματικής αλυσίδας δε συνεχίζεται επ' άπειρον, αλλά σταματά. Υπάρχουν δηλαδή προτάσεις οι οποίες δεν αποδεικνύονται από άλλες προηγούμενες προτάσεις, αλλά απορρέουν απευθείας από τα αξιώματα («αιτήματα» και «κοινές έννοιες») που παραθέτει ο Ευκλείδης στην αρχή του βιβλίου. Ας περάσουμε, λοιπόν, ακριβώς σε αυτές τις αρχικές προτάσεις, που αποτελούν και τον πυρήνα της αξιωματικής δομής.

Τα «αιτήματα» είναι αρχικές προτάσεις οι οποίες προσιδιάζουν στη συγκεκριμένη κάθε φορά επιστήμη, στην προκειμένη περίπτωση στη γεωμετρία. Ο Ευκλείδης διατυπώνει πέντε αιτήματα:

1. *Ζητείται να γίνει δεκτό ότι από οποιοδήποτε σημείο σε οποιοδήποτε σημείο άγεται ευθεία γραμμή.*

2. *Και (ότι) πεπερασμένη ευθεία προεκτείνεται σε ευθεία κατά συνεχή τρόπο.*

3. *Και (ότι) με οποιοδήποτε κέντρο και διάστημα γράφεται κύκλος.*

4. *Και (ότι) όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*

5. *Και αν η ευθεία η οποία τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες των δύο ορθών, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται προς εκείνα τα μέρη τους όπου βρίσκονται οι μικρότερες των δύο ορθών.*

Ο ρόλος των τριών πρώτων αιτημάτων είναι να εξασφαλίσουν τη δυνατότητα της κατασκευής της ευθείας και του κύκλου και, κατά συνέπεια, μόνο εκείνων των γραμμών και των γεωμετρικών σχημάτων που κατασκευάζονται με πεπερασμένο αριθμό βημάτων από τις δύο αυτές βασικές γραμμές. Στα *Στοιχεία*, επομένως, δεν έχουν θέση καμπύλες όπως είναι οι κωνικές τομές, η τετραγωνίζουσα κτλ. Η φύση των δύο τελευταίων αιτημάτων είναι διαφορετική. Αποσκοπούν στο να εξασφαλίσουν ότι κάποια γεωμετρικά σχήματα έχουν ορισμένες ειδικές ιδιότητες. Ιδιαίτερα για το πέμπτο αίτημα, το περίφημο αίτημα των παραλλήλων, πρέπει να σημειώσουμε ότι από τη στιγμή που διατυπώθηκε οι μαθηματικοί πίστεψαν ότι θα μπορούσαν να το συναγάγουν από τα υπόλοιπα αιτήματα, γεγονός που, αν συνέβαινε, θα το καθιστούσε περιττό και, τελικά, θα το μετέτρεπε σε απλό θεώρημα. Ωστόσο, προσπάθειες αιώνων να αποδειχθεί το αίτημα αυτό απέβησαν άκαρπες και μόλις τον 19ο αι., με την ανακάλυψη των μη-ευκλείδειων γεωμετριών, αποδείχθηκε περίτρανα ότι το αίτημα αυτό είναι ανεξάρτητο των υπολοίπων και ότι ο Ευκλείδης είχε απόλυτο δίκιο που το συμπεριέλαβε μεταξύ των αιτημάτων.

Αντίθετα με τα αιτήματα, οι «κοινές έννοιες» είναι προτάσεις οι οποίες δεν προσιδιάζουν σε μία μόνο συγκεκριμένη επιστήμη, αλλά η ισχύς τους είναι γενική και καλύπτει κάθε επιστήμη. Για παράδειγμα, οι τρεις πρώτες από τις κοινές έννοιες,

1. *τα προς το αυτό ίσα είναι και μεταξύ τους ίσα, και*
2. *αν σε ίσα προστεθούν ίσα, τα όλα είναι ίσα, και*
3. *αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, αυτά που υπολείπονται είναι ίσα,*

χρησιμοποιούνται και σήμερα ως αξιώματα σε κάθε εγχειρίδιο σχολικής άλγεβρας, αριθμητικής κτλ.



5.1.2 Ο Αρχιμήδης

Ο Αρχιμήδης (περ. 287-212 π.Χ.) ήταν ο πιο σημαντικός μαθηματικός της αρχαιότητας. Το γεγονός, μάλιστα, ότι διασώζονται για τη ζωή του περισσότερες μαρτυρίες απ' όσες διασώζονται για τη ζωή οποιουδήποτε άλλου αρχαίου μαθηματικού ίσως να μην είναι απλή σύμπτωση, αλλά να οφείλεται, ακριβώς, στην εκτίμηση με την οποία οι επόμενες γενιές περιέβαλαν το πρόσωπό του.

Τα γεωμετρικά συγγράμματα του Αρχιμήδη διαφοροποιούνται από το κλασικό σύγγραμμα του Ευκλείδη ως προς ένα καίριας σημασίας σημείο: ο Αρχιμήδης καταθέτει συχνά τη **μέθοδο ανακάλυψης** των θεωρημάτων, προτού παρουσιάσει την αυστηρή απόδειξή τους κατά το ευκλείδειο πρότυπο. Διασώζεται, μάλιστα, ένα σύγγραμμά του με τον τίτλο *Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος*, αφιερωμένο αποκλειστικά στις ευρετικές μεθόδους που χρησιμοποίησε προκειμένου να οδηγηθεί σε ορισμένα αποτελέσματα τα οποία, σε άλλες πραγματείες του, τα αποδεικνύει με αυστηρό τρόπο.

Αν θα θέλαμε να περιγράψουμε με λίγα λόγια το επιστημονικό έργο του Αρχιμήδη, θα εντοπίζαμε τα βασικά χαρακτηριστικά του στα ακόλουθα σημεία:

1. Στην πρόσληψη των «απειροστικών» μεθόδων του Ευδόξου (μέθοδος της εξάντλησης) και στην επιτυχή εφαρμογή τους για την εύρεση εμβαδών και όγκων καμπυλόγραμμων σχημάτων.

2. Στην ανάπτυξη ευρετικών μεθόδων με βάση τις οποίες ήταν σε θέση να γνωρίζει πολλά μαθηματικά αποτελέσματα, προτού ακόμη τα αποδείξει με αυστηρό (κατά κανόνα γεωμετρικό) τρόπο.

3. Στην επεξεργασία μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή φυσικών φαινομένων της στατικής και της υδροστατικής και στην επινόηση μηχανικών κατασκευών, η λειτουργία των οποίων βασίζεται στην εφαρμογή φυσικών αρχών.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Για τη ζωή του Αρχιμήδη διασώζονται, όπως έχουμε αναφέρει, πολλές πληροφορίες από την αρχαιότητα. Γνωρίζουμε με βεβαιότητα τη χρονολογία θανάτου του, ο οποίος συνέβη το Σεπτέμβριο του έτους 212 π.Χ., κατά την άλωση των Συρακουσών από το Ρωμαίο ύπατο Μάρκελλο. Η χρονολογία της γέννησής του μπορεί να συναχθεί εμμέσως με βάση τη μαρτυρία του

Βυζαντινού πολυΐστορος Τζέτζη ότι κατά το έτος του θανάτου του διήνυε το 75ο έτος της ηλικίας του. Αν η μαρτυρία είναι ακριβής, τότε συμπεραίνουμε ότι ο Αρχιμήδης γεννήθηκε το 287 π.Χ.

Ο Αρχιμήδης ήταν γιος του αστρονόμου Φειδία και, κατά τον Πλούταρχο, φίλος και συγγενής του τυράννου Ιέρωνος Β΄ των Συρακουσών, υπό τη διοίκηση του οποίου (από το 270 έως το 216 π.Χ.) η πόλη γνώρισε μεγάλη άνθηση. Θεωρείται σχεδόν βέβαιο ότι όταν ήταν νέος ταξίδεψε στην Αλεξάνδρεια, όπου και παρέμεινε για ένα διάστημα. Συνήψε σχέσεις με τον κύκλο των εκεί επιστημόνων, με πολλούς από τους οποίους δημιούργησε προσωπική φιλία και διατηρούσε επιστημονική αλληλογραφία. Έτσι, πολλά από τα έργα του φέρουν προλόγους, οι οποίοι έχουν μορφή επιστολής που απευθύνεται σε αλεξανδρινούς επιστήμονες, μεταξύ των οποίων πρέπει να μνημονεύσουμε τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο (διευθυντή της περίφημης Βιβλιοθήκης), το μαθηματικό Κόνωνα († 240 π.Χ.) και το μαθητή αυτού Δοσίθεο. Το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του, πάντως, ο Αρχιμήδης το πέρασε στις Συρακούσες, αφοσιωμένος στις μαθηματικές μελέτες του, αλλά και καλούμενος συχνά από τον Ιέρωνα και τον διάδοχό του να αξιοποιήσει τη μαθηματική του μεγαλοφυία προκειμένου να επιλύσει διάφορα πρακτικά προβλήματα.

Πολλές μαρτυρίες διασώζονται που αναφέρονται στην αφοσίωση του Αρχιμήδη στη μαθηματική έρευνα. Ο Πλούταρχος, λ.χ., αναφέρει στον *Βίο του Μαρκέλλου*: «Σαν να τον μάγευε μια έμφυτη και κατοικούσα πάντοτε μέσα του σειρήνα, λησμονούσε και να λάβει την τροφή και να περιποιείται το σώμα του, πολλές φορές δε συρόμενος από τους υπηρέτες για το άλειμμα (με λάδι) και το λουτρό, έγραφε στην τέφρα γεωμετρικά σχήματα και, ενώ το σώμα ήταν αλειμμένο με λάδι έγραφε με το δάκτυλό του γραμμές [γεωμετρικά σχήματα] κατεχόμενος από μεγάλη ηδονή και κυριαρχούμενος υπό των Μουσών». Μια άλλη αντίστοιχη μαρτυρία και πάλι από τον Πλούταρχο αναφέρει ότι όταν βρισκόταν στο λουτρό και συνέλαβε τη λύση του προβλήματος της εξακρίβωσης της γνησιότητας του χρυσού στεφάνου του Ιέρωνα, πήδηξε από το λουτρό και σαν άνθρωπος που καταλαμβάνεται από θεία μανία βάδιζε γυμνός στις οδούς της πόλης φωνάζοντας το περίφημο ΕΥΡΗΚΑ. Οι μαρτυρίες αυτές, ανεξάρτητα από το αν ανταποκρίνονται απολύτως στην ιστορική αλήθεια, φανερώνουν την αφοσίωση του Αρχιμήδη στην επιστημονική έρευνα, αφοσίωση, άλλωστε, η οποία του κόστισε, όπως ξέρουμε, και την ίδια τη ζωή του.

Ο Αρχιμήδης, όμως, επέδειξε εξαιρετική εφευρετικότητα στη μηχανική και την τεχνολογία, αν και αυτή την απασχόληση τη θεωρούσε διασκέδαση και πάρεργο. Η εφευρετικότητά του έλαμψε, κυρίως, κατά τη διάρκεια του 2ου καρχηδονιακού πολέμου, όταν η πόλη των Συρακουσών, ως σύμμαχος της Καρχηδόνας, περικυκλώθηκε από τους Ρωμαίους. Ας δώσουμε τον λόγο στον Ιταλό ιστορικό των μαθηματικών Gino Loria (Τζίνο Λόρια, 1862-1939): «Ο Αρχιμήδης έθεσε την ιδιοφυία του στην υπηρεσία της πατρώας γης και αποδείχθηκε τόσο καταπληκτικά γόνιμος στην επινόηση πρωτότυπων όπλων, αμυντικών και επιθετικών (αρκεί να μνημονεύσουμε τους φοβερούς καταπέλτες και τα θρυλικά καυστικά κάτοπτρα), ώστε παρουσίασε το μοναδικό στην ιστορία φαινόμενο ενός άνδρα να μάχεται μόνος για μια τριετία εναντίον ολόκληρου στρατεύματος». Το

αποτέλεσμα της πολιορκίας είναι γνωστό. Οι Συρακούσες καταλήφθηκαν ύστερα από προδοσία, και κατά τη διάρκεια της λεηλασίας που ακολούθησε ο Αρχιμήδης φονεύθηκε από Ρωμαίο στρατιώτη.

Στη μνήμη του ανεγέρθηκε αντάξιος τάφος, επάνω στον οποίο, σύμφωνα με δική του επιθυμία, χαράχθηκε σφαίρα εγγεγραμμένη σε κύλινδρο, για να υπενθυμίζει στις επερχόμενες γενιές ένα από τα σπουδαιότερα μαθηματικά αποτελέσματά του. Το μνημείο αυτό ανακαλύφθηκε αργότερα, γύρω στο 75 π.Χ. από τον Κικέρωνα, όταν υπηρετούσε ως Οικονομικός Διοικητής (Quaestor) στη Σικελία. Σήμερα δεν υπάρχει κανένα ίχνος του.

Ο νόμος για την ισορροπία του ζυγού

Αναφέραμε πιο πάνω ότι ο Αρχιμήδης επεξεργάστηκε **μαθηματικά μοντέλα** προκειμένου να μελετήσει διάφορα φυσικά φαινόμενα και να εξαγάγει **ποσοτικά αποτελέσματα** σχετικά με αυτά. Δύο πολύ γνωστοί σήμερα νόμοι, που διέπουν αντίστοιχα φυσικά φαινόμενα, οφείλονται σε αυτόν: ο νόμος για την ισορροπία του ζυγού (τον οποίο, μάλιστα, εφάρμοσε ευρέως προκειμένου να βρει το κέντρο βάρους διαφόρων στερεών) και η λεγόμενη βασική αρχή της υδροστατικής.

Η απόδειξη του νόμου για την ισορροπία του ζυγού δίνεται από τον Αρχιμήδη στο πρώτο βιβλίο της πραγματείας *Μηχανικά* (αναφέρεται συχνά και με το μεταγενέστερο τίτλο *Επιπέδων ισορροπιών ή κέντρα βαρών επιπέδων*). Το βιβλίο περιλαμβάνει 15 προτάσεις. Των προτάσεων αυτών προηγείται η διατύπωση 7 αιτημάτων (*προλαμβανόμενα*), που εξασφαλίζουν, ουσιαστικά, τη μετατροπή του προβλήματος της μελέτης του ζυγού από **φυσικό** σε **μαθηματικό** πρόβλημα. Παραθέτουμε εδώ τέσσερα από τα αιτήματα αυτά:

1. Λαμβάνουμε ως αίτημα τα ίσα βάρη να ισορροπούν, όταν εξαρτώνται σε ίσα μήκη, ενώ τα ίσα βάρη, όταν εξαρτώνται σε άνισα μήκη, να μην ισορροπούν, αλλά να κλίνει (η φάλαγγα) προς το βάρος που είναι εξαρτημένο στο μεγαλύτερο μήκος.

2. Εάν υπάρχουν βάρη που ισορροπούν εξαρτημένα σε ορισμένα μήκη και προστεθεί βάρος στο απ' αυτά, (λαμβάνουμε ως αίτημα) να μην υπάρχει ισορροπία, αλλά να κλίνει (η φάλαγγα) προς το βάρος εκείνο, στο οποίο έγινε η πρόσθεση.

3. Με τον ίδιο τρόπο, εάν από το ένα βάρος αφαιρεθεί κάτι, (λαμβάνουμε ως αίτημα) να μην υπάρχει ισορροπία, αλλά να κλίνει (η φάλαγγα) προς το βάρος από το οποίο δεν αφαιρέθηκε τίποτα.

6. Εάν μεγέθη εξαρτημένα σε ορισμένα μήκη ισορροπούν, και τα ίσα προς αυτά θα ισορροπούν στα ίδια μήκη.

Το βασικό θεώρημα, που αφορά τη συνθήκη ισορροπίας του ζυγού, διατυπώνεται και αποδεικνύεται στις προτάσεις 6 και 7. Η πρόταση 6 πραγματεύεται την περίπτωση στην οποία τα βάρη των δύο εξαρτώμενων μεγεθών είναι σύμμετρα, και η



Ο θάνατος του Αρχιμήδη. Ψηφιδωτό που προέρχεται, πιθανώς, από τη σχολή του Ραφαήλ.

πρόταση 7 την περίπτωση στην οποία είναι ασύμμετρα. Εμείς θα περιοριστούμε να παραθέσουμε δύο προτάσεις:

6. Τα σύμμετρα μεγέθη ισορροπούν σε αποστάσεις αντιστρόφως ανάλογες προς το λόγο των βαρών.

7. Αλλά και ασύμμετρα αν είναι τα μεγέθη, ομοίως θα ισορροπούν σε μήκη που έχουν λόγο αντίστροφο προς το λόγο των μεγεθών.

Η υδροστατική

Τα φαινόμενα της υδροστατικής ο Αρχιμήδης τα μελετά στην πραγματεία του που φέρει τον τίτλο [Περί] *Οχουμένων*. Έως τα τέλη του περασμένου αιώνα η πραγματεία αυτή σωζόταν μόνο στη λατινική μετάφραση που είχε εκπονήσει ο Γουλιέλμος του Μέρμπεκε (περ. 1215-1297). Το ελληνικό κείμενο ανακαλύφθηκε μόλις το 1899. Αποτελούσε μέρος ενός παλίμψηστου κώδικα του 10ου αι., που περιείχε επίσης και τη *Μέθοδο*.

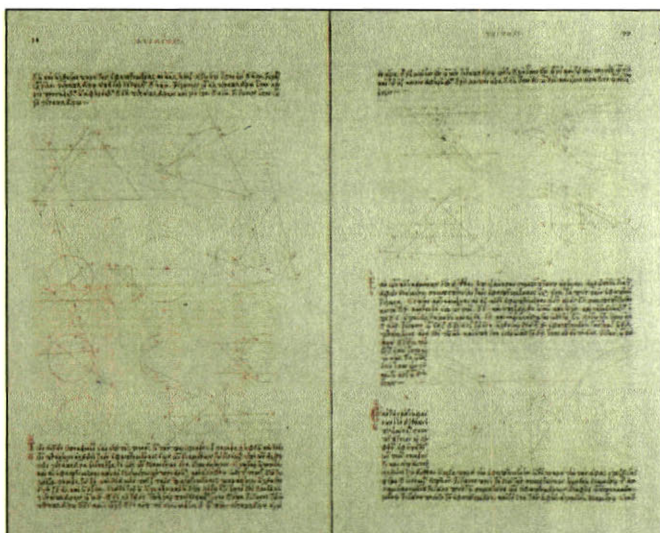
Η πραγματεία [Περί] *Οχουμένων* αποτελείται από δύο βιβλία με 9 και 10 προτάσεις αντίστοιχα. Το πρώτο βιβλίο αρχίζει, όπως και τα *Μηχανικά*, με ένα αίτημα, ο ρόλος του οποίου είναι να απλοποιήσει το πραγματικό πρόβλημα μετατρέποντάς το σε μαθηματικό. Η εξιδανίκευση του πραγματικού προβλήματος γίνεται, επίσης, στη δεύτερη πρόταση του πρώτου βιβλίου, όπου αποδεικνύεται ότι η επιφάνεια κάθε υγρού ευρισκόμενου σε ισορροπία είναι σφαιρική και το κέντρο της σφαίρας είναι το ίδιο με το κέντρο της γης. Με βάση αυτή την πρόταση ο Αρχιμήδης πραγματεύεται το φαινόμενο των σωμάτων που επιπλέουν ή βυθίζονται μέσα σε υγρό, σαν να αποτελεί το υγρό μέρος μιας σφαίρας. Η βασική αρχή της υδροστατικής διατυπώνεται και αποδεικνύεται στην πρόταση 7 του πρώτου βιβλίου: «Τα βαρύτερα του

υγρού στερεά, όταν αφήνονται στο υγρό, θα φέρονται προς τα κάτω, όσο είναι δυνατόν να βυθίζονται, και θα είναι ελαφρότερα μέσα στο υγρό τόσο όσο βάρος έχει το υγρό το οποίο έχει όγκο όσος είναι ο όγκος του στερεού μεγέθους».

Δε θα σταθούμε στην απόδειξη της πρότασης. Θα περιοριστούμε να μνημονεύσουμε ένα παράδειγμα πιθανής εφαρμογής της από τον Αρχιμήδη. Πρόκειται για την ιστορία με το στέφανο του Ιέρωνος, που διηγείται ο Βιτρούβιος στο γνωστό έργο του *De Architectura* [Περί Αρχιτεκτονικής]. Σύμφωνα με τη μαρτυρία του Βιτρούβιου, όταν ο Ιέρων έγινε βασιλιάς των Συρακουσών, θέλησε να αφιερώσει στους θεούς χρυσό στέφανο. Τον παράγγειλε, λοιπόν, έναντι αμοιβής από ένα χρυσοχόο, στον οποίο διέθεσε το χρυσό από τον οποίο θα τον κατασκεύαζε. Ο χρυσοχόος παρέδωσε το έργο στην προκαθορισμένη προθεσμία και το βάρος ήταν, πράγματι, ίσο προς το βάρος του χρυσού που του είχε διατεθεί. Αργότερα, όμως, διατυπώθηκε η κατηγορία ότι ο χρυσοχόος είχε αντικαταστήσει μέρος του χρυσού από άργυρο ανάλογου βάρους. Ο Ιέρων αγανάκτησε και ανέθεσε στον Αρχιμήδη να ερευνήσει εάν πράγματι τον είχε απατήσει ο τεχνίτης. Ο Βιτρούβιος περιγράφει πώς ο Αρχιμήδης απέδειξε την απάτη. Η περιγραφή του βασίζεται στη γνωστή ιστορία με το λουτρό και δε γίνεται χρήση της βασικής αρχής της υδροστατικής, ωστόσο, όπως έχει αποδείξει ο διαπρεπής Άγγλος ιστορικός των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών Thomas L. Heath (Τόμας Χηθ, 1861-1940), ο τρόπος που εργάστηκε ο Αρχιμήδης μπορεί να ερμηνευθεί επίσης με βάση την αρχή αυτή.

5.1.3 Ο Απολλώνιος και η μελέτη των κωνικών τομών

Ο τρίτος επιφανής μαθηματικός της ελληνιστικής εποχής και, στην πραγματικότητα, ο τελευταίος μεγάλος γεωμέτρης του αρχαίου κόσμου ήταν ο Απολλώνιος από την Πέργη της Παμφυλίας στα νότια της Μικράς Ασίας (περ. 262-180 π.Χ.). Τη φήμη του στην αρχαιότητα την απέκτησε



Τα Κωνικά *του Απολλωνίου. Ελληνικό χειρόγραφο του έτους 1536.*

πρωτίστως από το έργο του στη μαθηματική αστρονομία: αυτός είναι που μαζί με τον Ίππαρχο εισήγαγε το πλανητικό μοντέλο του επικύκλου-φέροντος κύκλου, που αντικατέστησε το ευδόξειο μοντέλο των ομόκεντρων σφαιρών και κυριάρχησε στην ιστορία της αστρονομίας ως την Επιστημονική Επανάσταση. Για την ελληνιστική αστρονομία, όμως, θα μιλήσουμε στην επόμενη ενότητα. Το βασικό έργο του Απολλωνίου στη γεωμετρία είναι τα *Κωνικά*· είναι γραμμένο σε οκτώ βιβλία (κεφάλαια), από τα οποία σώζονται τα επτά, τέσσερα στο πρωτότυπο ελληνικό κείμενο και τρία σε αραβική μετάφραση. Στο έργο αυτό ο Απολλώνιος μετασχημάτισε ριζικά τη θεωρία των κωνικών τομών, οι απαρχές της μελέτης των οποίων ανάγονται στον Μέναιχμο, ενώ στην περαιτέρω επεξεργασία τους είχαν συμβάλλει προς τα τέλη του 4ου π.Χ. αι. οι Αρισταίος και Ευκλείδης (οι οποίοι έγραψαν και σχετικά συγγράμματα που δε διασώθηκαν), καθώς και ο Αρχιμήδης.

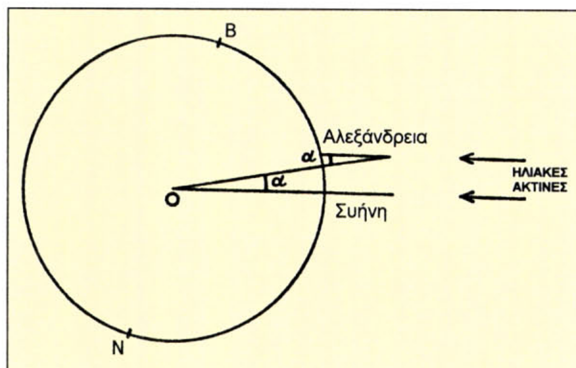
Όσες πληροφορίες έχουμε για τη ζωή του Απολλωνίου τις αντλούμε βασικά από τους προλόγους που έχει προτάξει σε μερικά από τα βιβλία των *Κωνικών*. Δυστυχώς, οι πληροφορίες αυτές δεν είναι πολλές. Μπορούμε να τις συνοψίσουμε λέγοντας ότι ο Απολλώνιος ήταν ένα τυπικό παράδειγμα αλεξανδρινού επιστήμονα: σπούδασε και έζησε για μεγάλο χρονικό διάστημα στην Αλεξάνδρεια, ταξίδεψε σε πολλές πόλεις της ανατολικής Μεσογείου και είχε επιστημονικές επαφές με τους κορυφαίους μαθηματικούς του τέλους του 3ου και των αρχών του 2ου π.Χ. αιώνα.

Με τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο η ελληνική γεωμετρική ερευνητική παράδοση έφτασε στο απόγειό της. Τα έργα τους, που ένα πολύ μεγάλο μέρος τους διασώθηκε σε αντίθεση με τα έργα των προγενεστέρων τους, ξεπεράστηκαν μόλις το 17ο αι., δηλαδή ύστερα από 2000 χρόνια περίπου, με τους Viète, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, στη διάρκεια της περιόδου που οι ιστορικοί της επιστήμης ονομάζουν Επιστημονική Επανάσταση. Δίκαια, λοιπόν, ο Ιταλός ιστορικός των μαθηματικών G. Loria αποκάλεσε τους τρεις αυτούς κορυφαίους Έλληνες μαθηματικούς «νομοθέτες της γεωμετρίας».

Η επιστημονική δραστηριότητα, όμως, που αναπτύχθηκε τον 3ο π.Χ. αι., δεν εξαντλείται σε όσα αναφέραμε για τους τρεις αυτούς μαθηματικούς. Εξαιρετικά σημαντικό είναι, επίσης, το έργο που παράχθηκε στη μαθηματική αστρονομία, σε κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών όπως η οπτική και η γεωγραφία, καθώς και στην εφαρμοσμένη μηχανική. Με τις εξελίξεις στην αστρονομία θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα. Εδώ θα στραφούμε προς τους κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών και θα αρκεστούμε να παρουσιάσουμε το έργο ενός ακόμη σημαντικού εκπροσώπου της ελληνιστικής επιστήμης, του Ερατοσθένη, στη μαθηματική γεωγραφία.

5.1.4 Ο Ερατοσθένης και η μέτρηση του μήκους της περιφέρειας της γης

Τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο τον συναντήσαμε, όταν συζητούσαμε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου. Ήταν σύγχρονος του Αρχιμήδη, με τον οποίο αλληλογραφούσε συχνά και διακρίθηκε στα μαθηματικά (όπου, εκτός από τη μηχανική επίλυση του προβλήματος της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων, επινόησε μια μέθοδο για την εύρεση της ακολουθίας των πρώτων αριθμών, που είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως «κόσκινο του Ερατοσθένη»), αλλά επίσης στη μαθηματική γεωγραφία, τη φιλολογία, τη λογοτεχνία, την ποίηση, την ιστορία, την περιγραφική γεωγραφία (η οποία στην αρχαιότητα ονομαζόταν χρονογραφία), ενώ διετέλεσε και διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Λόγω της πολυσχιδούς δραστηριότητάς του οι σύγχρονοί του τον αποκαλούσαν «Πένταθλο», του είχαν προσθέσει όμως και το παρατσούκλι «ο Βήτα», θέλοντας ίσως με αυτό να υποδηλώσουν ότι σε κανένα από τα επιστημονικά πεδία που απαριθμήσαμε πιο πάνω, ο Ερατοσθένης δεν ήταν ο καλύτερος. Εμείς θα αρκεστούμε εδώ να αναφέρουμε μια αξιοσημείωτη πλευρά του έργου του στη **μαθηματική γεωγραφία**: τον αυστηρό υπολογισμό του μήκους της γήινης περιφέρειας με βάση παρατηρήσεις που έκανε στην Αλεξάνδρεια και σε μια πόλη νοτιότερα αυτής, τη Συήνη (πλησίον του σημερινού Ασουάν), δύο πόλεις που βρίσκονται περίπου στον ίδιο μεσημβρινό. Ο Ερατοσθένης παρατήρησε ότι κατά τη μεσημβρία της ημέρας του θερινού ηλιοστασίου μια κατακόρυφη ράβδος στη Συήνη δεν άφηνε καθόλου σκιά (ο ήλιος ήταν στο ζενίθ του τόπου), ενώ την ίδια στιγμή μια αντίστοιχη ράβδος στην Αλεξάνδρεια άφηνε σκιά που αντιστοιχούσε σε γωνία ίση προς το 1/50 των 4 ορθών ($7\ 1/5^0$). Με έναν απλό γεωμετρικό συλλογισμό (όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί) προκύπτει ότι την ίδια τιμή έχει και η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο Αλεξάνδρεια-Συήνη· λαμβάνοντας υπόψη ότι η απόσταση Αλεξάνδρεια-Συήνη είχε υπολογισθεί σε 5000 στάδια ο Ερατοσθένης υπολόγισε ότι ολόκληρος ο γήινος μεσημβρινός έχει μήκος 250000 στάδια. Σύμφωνα με ορισμένες πληροφορίες, μάλιστα, είχε δώσει την ακριβέστερη τιμή 252000 στάδια. Αν θεωρήσουμε τώρα ότι το στάδιο ισούται προς 157,5 μέτρα, ο υπολογισμός του Ερατοσθένη δίνει για τη γήινη περιφέρεια την τιμή των 39690 χιλιομέτρων, μια τιμή που βρίσκεται πολύ κοντά στην πραγματική τιμή, που είναι 40009 χιλιόμετρα. Αληθινά ένα πολύ αξιόλογο επίτευγμα!



5.2 Η ελληνιστική αστρονομία

Τον 3ο π.Χ. αι. έκαναν την εμφάνισή τους στην αστρονομία δύο πολύ σημαντικές ιδέες: η *ηλιοκεντρική υπόθεση*, που διατύπωσε ο Αρίσταρχος ο Σάμιος, και το μοντέλο *επικύκλου-φέροντος* κύκλου για την εξήγηση της κίνησης των πλανητών κατά μήκος του ζωδιακού, που εισηγήθηκαν ο Απολλώνιος και ο Ίππαρχος.

5.2.1 Η ηλιοκεντρική υπόθεση του Αρίσταρχου

Στην πραγματεία του με τίτλο *Ψαμμίτης*, ο Αρχιμήδης παραθέτει την ακόλουθη μαρτυρία:

> *Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος παρουσίασε μερικές θεωρίες,* [το κείμενο λέει: «*ὑποθεσίων τινῶν ἐξέδωκεν γραφάς*»] *κατά τις οποίες εκ των υπαρχόντων στοιχείων συνάγεται ότι ο κόσμος είναι πολύ μεγαλύτερος από εκείνον που είπαμε προηγουμένως. Διότι υποθέτει ότι από τους αστέρες οι μεν απλανείς και ο Ήλιος μένουν ακίνητοι, η δε Γη περιφέρεται σε περιφέρεια κύκλου γύρω από τον Ήλιο, ο οποίος βρίσκεται στο κέντρο της* [κυκλικής] *τροχιάς, την δε σφαίρα των απλανών, η οποία κείται περί το αυτό κέντρο όπως και ο Ήλιος, υποθέτει ότι είναι τόσο μεγάλη, ώστε ο κύκλος, κατά τον οποίο υποθέτει ότι περιφέρεται η Γη, έχει τόση αναλογία προς την απόσταση των απλανών, όση έχει το κέντρο της σφαίρας προς την επιφάνεια.*

Σύμφωνα με τη μαρτυρία αυτή, ο Αρίσταρχος (περ. 310-230 π.Χ.) πρότεινε ένα ηλιοκεντρικό σύστημα, στο οποίο ο Ήλιος παραμένει ακίνητος στο κέντρο του κόσμου, ενώ η Γη, η οποία σύμφωνα με μια επιπρόσθετη πληροφορία του Πλούταρχου περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της, εκτελεί κυκλική περιφορά γύρω απ' αυτόν (στο απόσπασμα δεν γίνεται λόγος για ηλιοκεντρικές τροχιές και των υπόλοιπων πλανητών). Η σημασία της μαρτυρίας του Αρχιμήδη είναι εξαιρετικά σημαντική για την ιστορία της επιστήμης, καθώς τα έργα του ίδιου του Αρίσταρχου δεν έχουν διασωθεί, εκτός από ένα μικρό σύγγραμμα με τίτλο *Περί μεγεθών και αποστημάτων ηλίου και σελήνης*, που έχει ως θέμα τη σύγκριση των αποστάσεων γης-ηλίου και γης-σελήνης και είναι, επομένως, ανεξάρτητο από το εάν στο κέντρο βρίσκεται η γη ή ο ήλιος.

Ο Αρίσταρχος δεν ήταν ο πρώτος που απομάκρυνε τη γη από το κέντρο του κόσμου. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, την ιδέα αυτή την είχε προτείνει ο πυθαγόρειος Φιλόλαος στα τέλη του 5ου π.Χ. αι., μόνο που εκείνος τοποθετούσε στο κέντρο του κόσμου την *Εστία*. Η πρωτοτυπία του Αρίσταρχου, όμως, συνίσταται στο ότι τοπο-

θέτησε τον ήλιο στο κέντρο ολόκληρου του συστήματος.

Ο Αρίσταρχος φαίνεται ότι πρότεινε το ηλιοκεντρικό σύστημα ως μαθηματική υπόθεση. Αυτό προκύπτει τόσο από την επανειλημμένη χρήση του ρήματος «υποθέτει» στο παραπάνω απόσπασμα του Αρχιμήδη όσο και από την αναφορά του Πλούταρχου (ο οποίος γράφει τρεις αιώνες αργότερα), σύμφωνα με την οποία η ιδέα «της περιστροφής και της περιφοράς» της γης υποστηρίχθηκε από τον Αρίσταρχο και το Σέλευκο από τη Σελεύκεια (μέσα 2ου π.Χ. αι.), «ο πρώτος παρουσιάζοντάς την σαν υπόθεση, ο δεύτερος διατυπώνοντάς τη ως βεβαιότητα».

Η ηλιοκεντρική θεωρία, όμως, δε βρήκε υποστηρικτές στην αρχαιότητα. Οι δύο μεγαλύτεροι αστρονόμοι του 3ου και του 2ου π.Χ. αι., ο Απολλώνιος και ο Ίππαρχος, την απέρριψαν, διατηρώντας το γεωκεντρικό δόγμα. Γιατί, όμως, η ηλιοκεντρική θεωρία δεν έγινε αποδεκτή στην αρχαιότητα; Μπορούμε να κάνουμε διάφορες ιστορικές υποθέσεις γι' αυτό. Πρώτα πρώτα, δεν ήταν συμβατή με τη δεσπόζουσα αριστοτελική φυσική και πιο συγκεκριμένα με τη διδασκαλία περί φυσικών κινήσεων και φυσικών τόπων. Ακόμη, θα μπορούσαν να διατυπωθούν εναντίον της πολλά αντεπιχειρήματα με βάση απλές καθημερινές παρατηρήσεις (η ταχεία περιστροφή της γης γύρω από τον άξονά της συνδυαζόμενη με την κίνησή της γύρω από τον ήλιο θα είχαν εμφανή αποτελέσματα στην κίνηση των σωμάτων στον αέρα - π.χ., ένα βέλος θα διέγραφε μεγαλύτερη απόσταση, όταν εκτοξευόταν προς την ανατολή παρά προς τη δύση κτλ.). Τέλος, για τους περισσότερους Έλληνες η ιδέα ότι η γη ήταν ακίνητη στο κέντρο του κόσμου δεν ήταν απλώς μια κοινή παραδοχή, αλλά και θρησκευτική πεποίθηση που αντανακλούσε την πίστη τους στον ιερό χαρακτήρα της γης. Υπήρχαν, επομένως, και θρησκευτικοί λόγοι που εμπόδιζαν την αποδοχή της ηλιοκεντρικής υπόθεσης. Για όλους αυτούς τους λόγους η θεωρία του Αρίσταρχου δεν άσκησε ουσιαστικά καμία επίδραση στην αρχαιότητα.

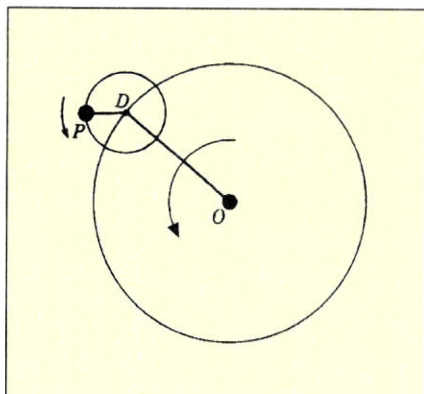
5.2.2 Το μοντέλο επικύκλου-φέροντος κύκλου και οι παραλλαγές του

Το μαθηματικό μοντέλο που διαδέχθηκε τον 3ο π.Χ. αι. εκείνο των ομόκεντρων σφαιρών του Ευδόξου ήταν το μοντέλο *επικύκλου-φέροντος* κύκλου με τις διάφορες παραλλαγές του. Η εισαγωγή του αποδίδεται στον Απολλώνιο και τα χαρακτηριστικά του μελετήθηκαν τόσο από τον ίδιο όσο και από τον Ίππαρχο τον επόμενο αιώνα. Το επιστέγασμα των εργασιών των δύο αυτών μαθηματικών ήταν η *Μαθηματική σύνταξις* (αναφέρεται συχνά και ως *Μεγίστη* ή με την αραβική παραφθορά *Αλμαγέστη*), το αριστούργημα της αρχαίας αστρονομίας, που έγραψε στα μέσα του 2ου μ.Χ. αι. ο Κλαύδιος Πτολεμαίος και έπαιξε στην ιστορία της μαθηματικής αστρονομίας τον ίδιο ρόλο που έπαιξαν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη στην



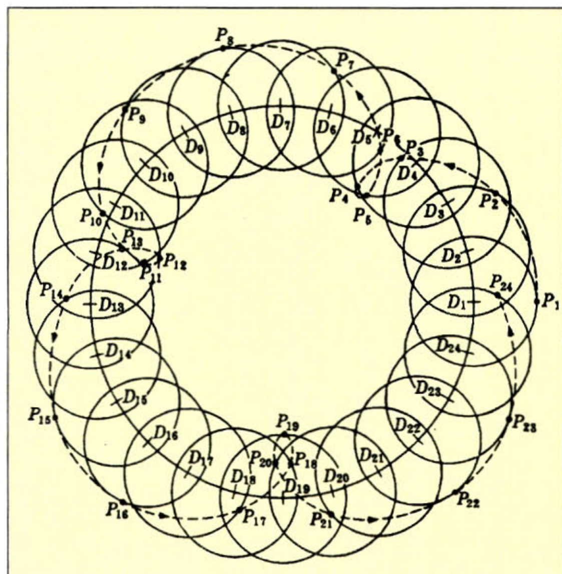
ιστορία της γεωμετρίας.

Το νέο μοντέλο σεβόταν τις δύο βασικές υποθέσεις της ελληνικής αστρονομίας, δηλαδή τη γεωκεντρική υπόθεση και την υπόθεση της ομαλής κυκλικής κίνησης, και είχε το σημαντικό πλεονέκτημα ότι μπορούσε να περιγράψει γεωμετρικά με πολύ μεγάλη οικονομία ένα μεγάλο αριθμό φαινομένων που σχετίζονται με την ανώμαλη κίνηση των πλανητών. Γρήγορα, λοιπόν, εκτόπισε το προηγούμενο μοντέλο του Ευδόξου.

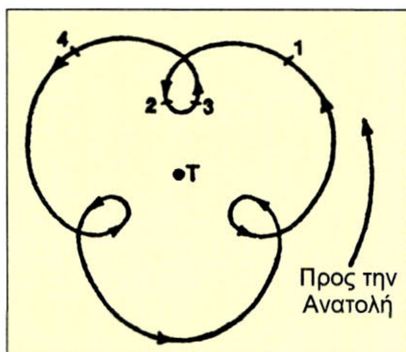


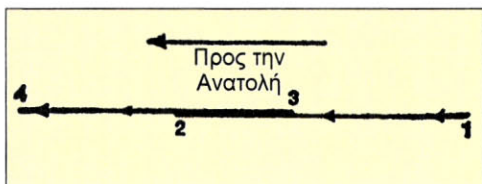
Στην απλούστερη μορφή του, ο γεωμετρικός μηχανισμός στον οποίο βασίζεται η νέα πλανητική θεωρία περιλαμβάνει ένα μικρό κύκλο (επίκυκλο), ο οποίος περιστρέφεται ομαλά γύρω από ένα σημείο που βρίσκεται επάνω στην περιφέρεια ενός δεύτερου περιστρεφόμενου κύκλου (φέροντα κύκλου). Ο πλανήτης P είναι τοποθετημένος επάνω στον επίκυκλο ενώ το κέντρο του φέροντος κύκλου συμπίπτει με το κέντρο της γης (βλ. σχήμα).

Ας δούμε τώρα πώς με το μηχανισμό αυτό εξηγείται η «ίδια» κίνηση των πλανητών. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ο φέρων κύκλος συμπληρώνει μία περιστροφή σε ένα χρόνο και ότι στο ίδιο διάστημα ο επίκυκλος συμπληρώνει ακριβώς τρεις περιστροφές γύρω από το κινητό κέντρο του, περιστρεφόμενος με την ίδια φορά. Η κίνηση του πλανήτη είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης των κινήσεων των δύο κύκλων και έχει μια μορφή σαν αυτήν που παριστάνεται με τη διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα της επόμενης σελίδας (πάνω αριστερά).



Το σχήμα που ακολουθεί δείχνει την κίνηση του πλανήτη, όταν διαγράφει ένα «βρόγχο», όπως φαίνεται από έναν επίγειο παρατηρητή.



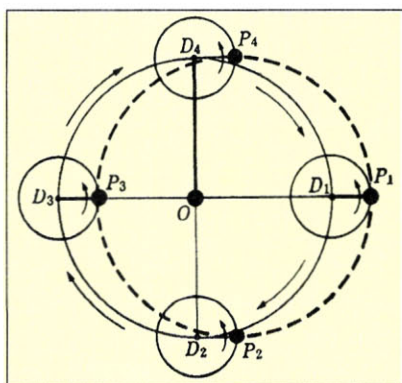


Ο παρατηρητής δε βλέπει το «βρόγχο», ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο της εκλειπτικής. Αυτό που βλέπει είναι οι διαδοχικές θέσεις 1, 2, 3 και 4 του πλανήτη επάνω στη γραμμή της εκλειπτικής.

Με κατάλληλη επιλογή των διαφόρων παραμέτρων του (ακτίνες και ταχύτητες περιστροφής των δύο κύκλων, αριθμός περιστροφών του επικύκλου σε μια περίοδο, φορά περιστροφής κτλ.), το μοντέλο επικύκλου-φέροντος κύκλου μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τη φαινόμενη κίνηση κάθε πλανήτη κατά μήκος του ζωδιακού. Επιπλέον, είναι πολύ πιο οικονομικό από το ευδόξειο μοντέλο και, τέλος, έχει το πλεονέκτημα ότι εξηγεί τη μεταβολή της φαινομένης λαμπρότητας των πλανητών με τη μεταβολή της απόστασής τους από τη γη. Οι λόγοι αυτοί ήταν αρκετοί, για να εξασφαλίσουν τη νίκη του νέου μοντέλου επάνω στο παλαιό.

Το μοντέλο επικύκλου-φέροντος κύκλου στην απλή μορφή του που περιγράψαμε προηγουμένως, δεν αρκούσε να περιγράψει όλες τις λεπτομέρειες της φαινομένης κίνησης των πλανητών. Γι' αυτό, κατά τη διάρκεια των 18 αιώνων που μεσολάβη-

Η Μεγίστη μαθηματική σύνταξις *του Κλαύδιου Πτολεμαίου.*
Ελληνικό χειρόγραφο του 9ου αιώνα.

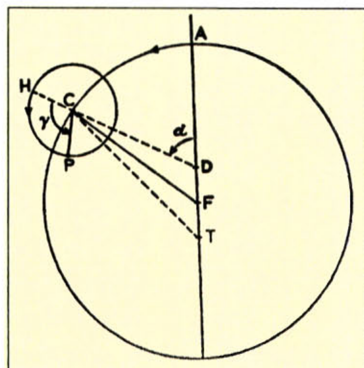


σαν από τον Απολλώνιο ως την εμφάνιση του *De Revolutionibus orbium coelestium* (1543) του Κοπέρνικου, οι αστρονόμοι επεξεργάστηκαν ένα σύνολο δευτερευουσών γεωμετρικών τροποποιήσεων του μοντέλου, προκειμένου να αποδίδονται με μεγαλύτερη ακρίβεια οι ανωμαλίες της κίνησης των διαφόρων πλανητών. Η πρώτη τροποποίηση ήταν το μοντέλο του *έκκεντρου κύκλου*, σύμφωνα με το οποίο ο πλανήτης κινείται ομαλά στην περιφέρεια ενός κύκλου, το κέντρο του οποίου, όμως, δε συμπίπτει με τη γη (βλ. σχήμα αριστερά).

Το μοντέλο του έκκεντρου κύκλου εισήχθη και αυτό από τον Απολλώνιο, ο οποίος μάλιστα απέδειξε την ισοδυναμία του με το μοντέλο επικύκλου-φέροντος κύκλου.

Άλλες τροποποιήσεις των δύο αυτών μοντέλων, μπορούσαν να προκύψουν αν θε-

ωρούσε κανείς, π.χ., ότι ο φέρων κύκλος στο σύστημα επικύκλου-φέροντος είναι έκκεντρος σε σχέση προς τη γη ή ακόμη ότι το κέντρο του δεν είναι σταθερό, αλλά κινείται σε ένα μικρό κύκλο με κέντρο τη γη. Όλα αυτά τα μοντέλα περιγράφονται λεπτομερώς από τον Πτολεμαίο στη *Μεγίστη* και εφαρμόζονται κατά περίπτωση για την εξήγηση της κίνησης κάθε πλανήτη ξεχωριστά. Η πιο σημαντική καινοτομία, όμως, που επέφερε ο Πτολεμαίος, είναι η επινόηση του «εξισωτή». Ο «εξισωτής» είναι ένα σημείο D, το οποίο δε συμπίπτει ούτε με το γεωμετρικό κέντρο F του φέροντος κύκλου ούτε με τη γη (T), αλλά ορίζεται με βάση την ιδιότητα: DF = FT. Η ταχύτητα περιστροφής του φέροντος κύκλου είναι σταθερή όχι ως προς το κέντρο F ούτε ως προς τη γη T αλλά ως προς τον εξισωτή D.



Η εισαγωγή του «εξισωτή» είχε σκοπό να χαλαρώσει την απαίτηση της ομαλής κίνησης και, έτσι, να εξηγήσει με μεγαλύτερη ακρίβεια τις παρατηρούμενες μεταβολές της ταχύτητας των πλανητών. Η ασθενέστερη μορφή ομαλής κίνησης που εισήγαγε ο Πτολεμαίος αποτέλεσε σημείο τριβής στη διάρκεια του Μεσαίωνα και δέχθηκε κριτική ακόμη και από τον ίδιο τον Κοπέρνικο. Ωστόσο, επέτρεψε στον Πτολεμαίο να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός πλανητικού μοντέλου, οι υπολογιστικές δυνατότητες του οποίου υπερνίκησαν τις όποιες επιφυλάξεις εγείρονταν από την απαίτηση μιας ισχυρότερης μορφής ομαλότητας.

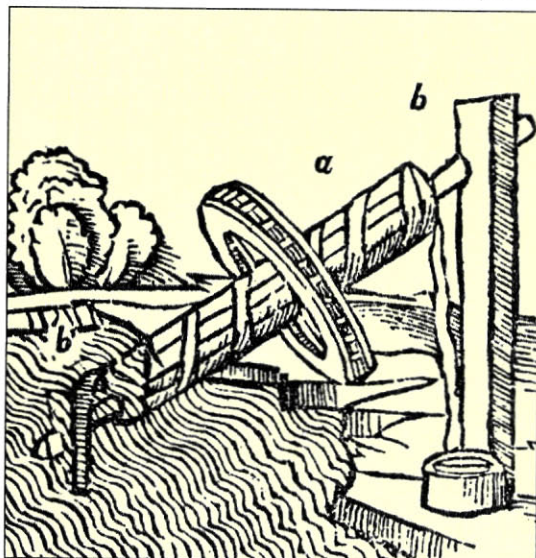
5.3 Οι μηχανικοί της σχολής της Αλεξάνδρειας

Στην ως τώρα αφήγηση της ιστορίας της ελληνικής επιστήμης δεν έχουμε αναφερθεί καθόλου στο θέμα των πρακτικών εφαρμογών της επιστημονικής γνώσης. Όμως το θέμα της αξιοποίησης των επιστημονικών γνώσεων για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, για την κατασκευή πολεμικών μηχανών και για τη δημιουργία μηχανισμών λατρευτικού ή ψυχαγωγικού χαρακτήρα, εμφανίζεται από πολύ νωρίς. Ήδη τον 6ο π.Χ. αι. ο αρχιτέκτονας Ευπαλίνος από τα Μέγαρα κατασκεύασε στη Σάμο ένα υδραγωγείο, διορύσσοντας τον ασβεστόλιθο του λόφου Κάστρο ταυτόχρονα και από τις δύο πλευρές· οι εργάτες, προσεγγίζοντας από τις δύο κατευθύνσεις συναντήθηκαν περίπου στο μέσον με ένα σφάλμα 30 ποδών οριζοντίως και 10 ποδών καθέτως. Ήταν ασφαλώς ένα εξαιρετικό τεχνικό επίτευγμα για εκείνη την εποχή. Στους αιώνες που ακολούθησαν, ο ελληνικός πολιτισμός κατέκτησε ένα υψηλό επίπεδο τεχνικών δυνατοτήτων, που έφτασαν στο απόγειό τους κα-

τά την ελληνιστική περίοδο. Από τους πολλούς μηχανικούς που διακρίθηκαν για τα επιτεύγματά τους σε αυτό το διάστημα εμείς περιοριζόμαστε εδώ να μνημονεύσουμε τα ονόματα των κορυφαίων εκπροσώπων της αλεξανδρινής σχολής των μηχανικών, δηλαδή του Κτησίβιου (άκμασε γύρω στο 270 π.Χ.), του Φίλωνα από το Βυζάντιο (περ. 200 π.Χ.), του Βιτρούβιου (περ. 25 π.Χ) και, τέλος, του Ήρωνα (περ. 60 μ.Χ.), το έργο του οποίου είναι το επιστέγασμα της αλεξανδρινής μηχανικής και αποτελεί συγχρόνως μια αξιοσημείωτη σύνθεση των επιτευγμάτων των προγενέστερων μηχανικών.

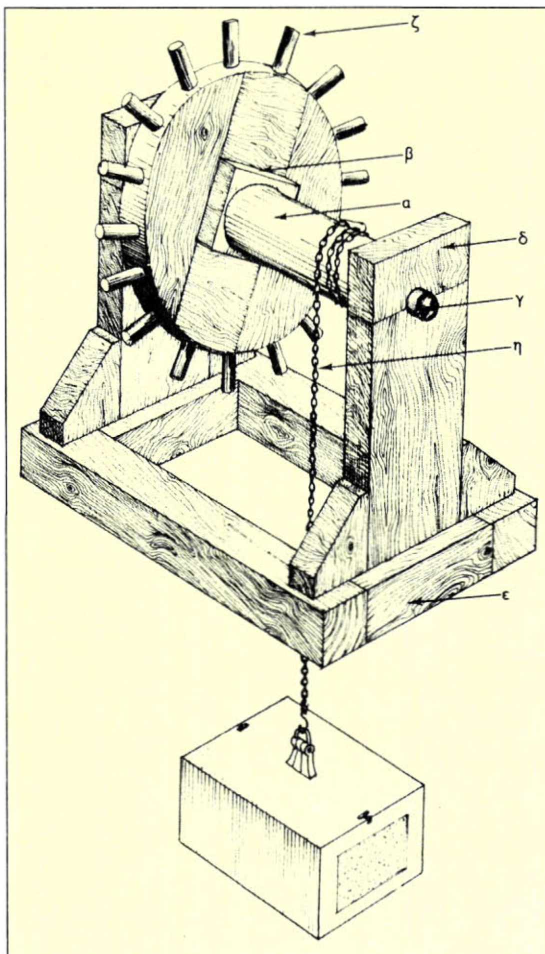
Μία από τις κύριες ασχολίες των μηχανικών στην αρχαιότητα ήταν η κατασκευή πολεμικών μηχανών. Ο τομέας αυτός έχει να επιδείξει σημαντική πρόοδο ήδη από τον 4ο π.Χ. αι. Ο Μέγας Αλέξανδρος, για παράδειγμα, χρησιμοποίησε σε μεγάλη κλίμακα βλητικά μηχανήματα στις εκστρατείες του. Η εξέλιξη αυτών των όπλων διήλθε τρία στάδια, από το πρωτόγονο τόξο στους τεράστιους καταπέλτες και στη συνέχεια στις βαλλίστρες, όπλα ικανά να εκσφενδονίζουν ακόντια ή μεγάλες πέτρες σε μακρινές αποστάσεις. Η σημαντική αυτή πρόοδος στα εκσφενδονιστικά μηχανήματα συνδυάστηκε με βαθιές αλλαγές στην τέχνη του πολέμου, που πέρασε από την κλίμακα του ανθρώπου στην κλίμακα των μηχανών, με όλο το οπλοστάσιο των γνωστών πολιορκητικών μηχανών με τις οποίες τα στρατεύματα εφορμούσαν στα τείχη των πόλεων: κριούς, καταπέλτες, χελώνες, τρύπανα. Ο Ήρων έγραψε δύο πραγματείες με αντικείμενο τις πολεμικές μηχανές: τα *Βελοποιϊκά* και τη φερόμενη υπό τον τίτλο *Χειροβαλλίστρας κατασκευή.* Σ' αυτές περιγράφει λεπτομερώς το σύνολο των πολεμικών μηχανών που αποτελούσαν στην εποχή του το αλεξανδρινό τεχνικό σώμα, ενώ η πρωτότυπη συνεισφορά του έγκειται στη χρησιμοποίηση μετάλλου για την κατασκευή της φορητής χειροβαλλίστρας, καινοτομία που επέτρεψε να μειωθούν σημαντικά οι διαστάσεις της χωρίς να μειωθεί παράλληλα η δύναμη βολής.

Η εφαρμογή της μηχανικής στην πολεμική τέχνη είχε, φυσικά, **ωφελιμιστικό χαρακτήρα**. Όμως, η εφευρετικότητα των ελλήνων μηχανικών δεν περιορίστηκε μόνο στην εφαρ-



Ο ατέρμων κοχλίας εφευρέθηκε από τον Αρχιμήδη και χρησιμοποιήθηκε για την άντληση υδάτων.

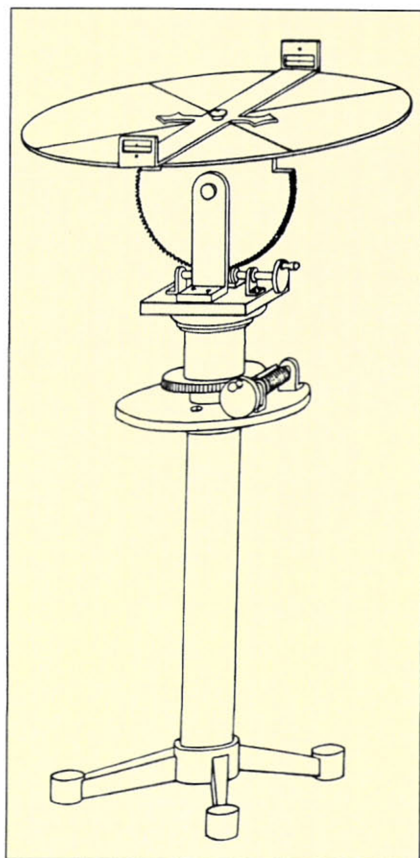
Το βαρούλκο ήταν μια από τις μηχανικές κατασκευές που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι για να ανυψώνουν βάρη. Όπως φαίνεται από την αναπαράσταση, αποτελούνταν από ένα χοντρό κυλινδρικό δοκάρι (α) το οποίο στο σημείο που τοποθετούταν ο τροχός είχε τετραγωνικό σχήμα (β). Το δοκάρι τελείωνε στα άκρα του σε δύο χάλκινα βύσματα (γ) τα οποία μπορούσαν να περιστρέφονται στις τρύπες ενός πλαισίου (δ), στερεωμένου σε γερά σε μια βάση (ε). Με τη βοήθεια των ακτίνων (ζ) οι εργάτες γύριζαν τον τροχό ώστε η αλυσίδα (η) να τυλίγεται γύρω από το δοκάρι και έτσι να ανυψώνεται το βάρος με σημαντική οικονομία δύναμης.



μογή της μηχανικής στην πολεμική τέχνη· στράφηκε και σε άλλες περιοχές, όπως, για παράδειγμα, στην κατασκευή συσκευών που αποσκοπούσαν στην επίλυση πρακτικών αναγκών της καθημερινής ζωής. Έως τον 4ο π.Χ. αι. είχαν εφευρεθεί οι τέσσερις από τις πέντε απλές μηχανές που χρησιμοποιήθηκαν ευρέως στην αρχαιότητα για πρακτικούς σκοπούς, δηλαδή ο *μοχλός*, η *σφήνα*, το *πολύσπαστο* και το *μαγκάνι* (ἄξων ἐν τῷ περιτροχίῳ) ενώ τον 3ο π.Χ. αι. εφευρέθηκε ο *ατέρμων κοχλίας*. (Κατά την παράδοση ο *κοχλίας* εφευρέθηκε από τον ίδιο τον Αρχιμήδη και χρησιμοποιήθηκε αρχικά για την άντληση υδάτων, π.χ. από ορυχεία, ενώ σε μια δεύτερη εφαρμογή του χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή πιεστηρίων.) Από τη συνδυασμένη χρήση αυτών των βασικών μηχανών κατασκευάστηκαν άλλες πιο σύνθετες όπως είναι λ.χ. διάφορα ανυψωτικά μηχανήματα ή το οδόμετρο, μια συσκευή που υπολόγιζε την απόσταση την οποία διάνυε ένα όχημα.

Άλλες χρήσιμες συσκευές κατασκευάστηκαν με βάση αρχές της υδραυλικής. Τέτοιες συσκευές ήταν οι αναρροφητικές και καταθλιπτικές αντλίες και τα υδραυλικά ρολόγια.

Μια άλλη πλευρά του έργου των αρχαίων μηχανικών ήταν η κατασκευή **αυτομά-**



Αναπαράσταση της διόπτρας του Ήρωνα του Αλεξανδρινού (περ. 60 μ.Χ.), όπως ανακατασκευάστηκε από τον γερμανό ιστορικό της επιστήμης Hermann Schöne, σύμφωνα με την περιγραφή του ίδιου του Ήρωνα. Η διόπτρα ήταν ένας οριζόντιος κανόνας με δύο στόχαστρα, ο οποίος ήταν συναρμοσμένος με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να περιστρέφεται. Χρησιμοποιούνταν για τη μέτρηση γωνιών, την εύρεση των υψομέτρων αλλά και για αστρονομικές μετρήσεις.

των, δηλαδή μηχανισμών ψυχαγωγικού χαρακτήρα (ένα είδος παιχνιδιών) που λειτουργούσαν με προγραμματισμό και αυτορρύθμιση και αποσκοπούσαν στο να προκαλέσουν τον εντυπωσιασμό και την έκπληξη του θεατή. Στα έργα του *Πνευματικά και Περί αυτοματοποιητικής* ο Ήρων περιγράφει πολλούς τέτοιους μηχανισμούς, που εντυπωσιάζουν τόσο με τον αριθμό των υδραυλικών και μηχανικών στοιχείων που εμπεριέχουν όσο και με τις αρχές που διέπουν την κίνησή τους.

Αν μελετήσει κανείς τα κείμενα των αρχαίων για τη μηχανική, γράφει ο ιστορικός της αρχαίας ελληνικής επιστήμης G.E.R. Lloyd, τρία πράγματα θα του προκαλέσουν ιδιαίτερη εντύπωση: πρώτο, οι τρόποι με τους οποίους οι αρχαίοι επινοούν νέες εφαρμογές, ξεκινώντας από έναν περιορισμένο αριθμό απλών μηχανικών αρχών· δεύτερο, το ενδιαφέρον που επιδείκνυαν για τις ίδιες τις αρχές, για τις θεωρητικές δηλαδή πλευρές της μηχανικής· και τρίτο, ότι είχαν συνειδητοποιήσει πλήρως πως οι σκοποί που εξυπηρετούσαν οι εφευρέσεις τους ήταν δύο ειδών: η πρακτική χρησιμότητα από τη μια πλευρά και η ψυχαγωγία και η διασκέδαση από την άλλη. Η αρχαία τεχνολογία έχει να επιδείξει αξιόλογες προόδους και στις δύο αυτές πλευρές· δεν είχε μείνει στάσιμη όπως πολλοί πιστεύουν. Ωστόσο, είναι αλήθεια ότι ο κατάλογος των μηχανημάτων που επινοήθηκαν για να χρησιμεύσουν στην επίλυση καθημερινών αναγκών ήταν πολύ περιορισμένος και η χρήση τους δεν ήταν ευρείας κλίμακας.

Ερωτήσεις

1) Να αναπτύξετε τα βασικά χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τις φυσικές θεωρίες που διατύπωσαν οι Ίωνες φυσικοί φιλόσοφοι από τις αντίστοιχες θεωρίες που είχαν διατυπώσει προηγούμενοι στοχαστές.

2) Να αναπτύξτε το θέμα της συμβολής του Θαλή (και γενικότερα των Μιλήσιων φυσικών φιλοσόφων) στην ιστορία της γεωμετρίας.

3) Να περιγράψετε με συντομία τα τρία κλασικά προβλήματα της ελληνικής γεωμετρίας και τις προσπάθειες που έγιναν στην αρχαιότητα για την επίλυσή τους. Ποια η επίδραση που άσκησαν τα προβλήματα αυτά στην εξέλιξη των μαθηματικών;

4) Ποιος ο ρόλος του Πλάτωνα στην ιστορία της αρχαίας ελληνικής αστρονομίας;

5) Ποιες οι αρετές και ποια τα μειονεκτήματα (σε σχέση με τις απαιτήσεις της εποχής) του μοντέλου των ομόκεντρων σφαιρών, που επικράτησε στην ελληνική αστρονομία τον 4ο π.Χ. αιώνα;

6) Να σχολιάσετε την αριστοτελική θεωρία της κίνησης με βάση τις γνώσεις της φυσικής που έχετε αποκτήσει στις προηγούμενες τάξεις του Λυκείου.

7) Να διαβάσετε προσεκτικά τα τρία πρώτα αιτήματα από τα Στοιχεία *του Ευκλείδη και να απαντήσετε στο ερώτημα αν περιμένετε να βρείτε μέσα στο έργο αυτό οποιαδήποτε διαπραγμάτευση των τριών κλασικών προβλημάτων της ελληνικής γεωμετρίας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.*

8) Να διαβάσετε προσεκτικά τα δύο αποσπάσματα που ακολουθούν από την πραγματεία Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος *του Αρχιμήδη και να σχολιάσετε τη διαφορά ευρετικών και αποδεικτικών μεθόδων:*

- *«Διότι και μερικά απ' αυτά που βρήκα προηγουμένως με τη μηχανική αποδείχθηκαν ύστερα γεωμετρικά, μιας και η εξέταση με αυτόν τον τρόπο [δηλ. με τη μηχανική] δεν αποτελεί απόδειξη. Γιατί είναι πιο εύκολο να συναγάγει κανείς την απόδειξη, αφού έχει βρει με τη μέθοδο αυτή κάποια γνώση των ζητημάτων, παρά να την αναζητά χωρίς να γνωρίζει προηγουμένως τίποτε».*
- *«Ήθελα, αφού έγραψα τη μέθοδο, να τη δημοσιεύσω, αφ' ενός γιατί έχω μιλήσει προηγουμένως γι' αυτήν [σημ.: στην πραγματεία* Τετραγωνισμός παραβολής*] και δεν θέλω να φανώ σε ορισμένους ότι εκθέτω κενούς λόγους, και αφ' ετέρου γιατί είμαι πεπεισμένος ότι προσφέρω όχι μικρή υπηρεσία στα μαθηματικά· διότι νομίζω ότι μερικοί από τους συγχρόνους μου ή τους μεταγενέστε-*

ρους θα βρουν και άλλα θεωρήματα με την υποδειχθείσα μέθοδο, τα οποία δεν έχω σκεφθεί ακόμα».

9) Στην ενότητα 5.1.3 αναφέρεται ότι ο Απολλώνιος μετασχημάτισε ριζικά τη θεωρία περί κωνικών τομών που είχαν επεξεργαστεί οι προγενέστεροι μαθηματικοί. Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε αυτόν τον ισχυρισμό εξετάζοντας τον ορισμό του κώνου, όπως δίνεται κατ' αρχάς από τον Ευκλείδη και στη συνέχεια όπως τον μετασχημάτισε ο Απολλώνιος.

- *Ορισμός του Ευκλείδη: Κώνος είναι το σχήμα που περιλαμβάνεται όταν ορθογώνιο τρίγωνο περιστραφεί γύρω από μία εκ των καθέτων πλευρών, ενώ αυτή μένει ακίνητη, και επανέλθει στην αρχική του θέση. Και αν μεν η κάθετη που μένει ακίνητη είναι ίση προς την άλλη κάθετη, η οποία εκτελεί την περιστροφή, ο κώνος θα είναι ορθογώνιος, εάν δε μικρότερη, θα είναι αμβλυγώνιος, εάν δε μεγαλύτερη, οξυγώνιος.*
- *Ορισμός του Απολλωνίου: Εάν από ένα σημείο αχθεί ευθεία προς την περιφέρεια κύκλου, ο οποίος δε βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το σημείο, και προεκταθεί αυτή [η ευθεία] και προς τα δύο μέρη, και ενώ το σημείο μένει σταθερό, η ευθεία αφού περιστραφεί περί την περιφέρεια του κύκλου αποκατασταθεί πάλι στην αρχική της θέση, την επιφάνεια που γράφεται από την ευθεία (η οποία αποτελείται από δύο επιφάνειες που συνδέονται μεταξύ τους κατά την κορυφή, η καθεμιά από τις οποίες αυξάνεται επ' άπειρον, όταν η γράφουσα ευθεία προεκτείνεται επ' άπειρον), την καλώ κωνική επιφάνεια, κορυφή δε [καλώ] το σταθερό σημείο, άξονα δε [καλώ] την ευθεία που διέρχεται από το σημείο και το κέντρο του κύκλου. Κώνο δε καλώ το σχήμα που περιέχεται από τον κύκλο και την κωνική επιφάνεια την μεταξύ της κορυφής και της περιφέρειας του κύκλου.*

10) Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος χαρακτηρίζεται συχνά στη βιβλιογραφία ως «ο αρχαίος Κοπέρνικος» ή ως «πρόδρομος του Κοπέρνικου». Σε τι οφείλονται αυτοί οι χαρακτηρισμοί; Για ποιους λόγους η θεωρία που διατύπωσε ο Αρίσταρχος δεν έγινε αποδεκτή στην αρχαιότητα;

11) Ο Απολλώνιος (μαζί με τον Ίππαρχο) εισηγήθηκε το μοντέλο των επικύκλων και των φερόντων κύκλων για τη μαθηματική περιγραφή της φαινομένης κίνησης των πλανητών. Γνωρίζουμε, όμως, ότι ο Απολλώνιος ήταν ο μαθηματικός εκείνος που μελέτησε περισσότερο από κάθε άλλον στην αρχαιότητα τη θεωρία των κωνικών τομών. Πώς θα μπορούσαμε να εξηγήσουμε το γεγονός ότι απέφυγε να χρησιμοποιήσει τις κωνικές τομές για την περιγραφή των πλανητικών κινήσεων, επιμένοντας στη χρήση των κύκλων και των ομαλών κυκλικών κινήσεων;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΣΤΗΝ ΥΣΤΕΡΗ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΤΟ ΜΕΣΑΙΩΝΑ

1 Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΣΤΗΝ ΥΣΤΕΡΗ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

1.1 Η παρακμή της αρχαίας ελληνικής επιστήμης

Η ιστορία της ελληνικής επιστήμης μετά τον 3ο μ.Χ. αι. χαρακτηρίζεται από μια διαρκώς φθίνουσα παραγωγή νέων ιδεών και μια παράλληλη διοχέτευση της επιστημονικής δραστηριότητας στη συγγραφή σχολιαστικών υπομνημάτων και εξηγήσεων στα μεγάλα έργα του παρελθόντος και στη σύνταξη εκλαϊκευτικών συμπιλημάτων και επιτομών. Η δημιουργικότητα και το κριτικό πνεύμα που συνοδεύουν καμιά φορά τα έργα αυτά ή η εμφάνιση από καιρού εις καιρόν κάποιου επιγόνου που μπορεί να παραβληθεί με τις μεγάλες μορφές του παρελθόντος δεν αλλάζουν τη γενική εκτίμηση: η ελληνική επιστήμη περνάει πια στη φάση που συνοψίζεται, ανθολογείται και σχολιάζεται, για να περάσει αργότερα στους Άραβες και μέσω αυτών στη Δυτική Ευρώπη.

Ποια είναι, όμως, τα αίτια που οδήγησαν σ' αυτή την εξέλιξη; Το να παρατηρήσει κανείς ότι δεν εμφανίζονταν πλέον μορφές του αναστήματος του Ιπποκράτη, του Ευδόξου, του Αριστοτέλη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου ή του Πτολεμαίου είναι μάλλον μια στατιστική παρατήρηση και δεν απαντά στο ερώτημα. Από την άλλη πλευρά, οι σημαντικές πολιτικές, κοινωνικές και οικονομικές αλλαγές, που έλαβαν χώρα στον ευρύτερο ελληνιστικό κόσμο που είχε περάσει υπό ρωμαϊκή κατοχή (εξουθενωτικοί πόλεμοι, παρακμή της αγροτικής οικονομίας, διαίρεση της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, πτώση της Ρώμης και κατάρρευση του δυτικού τμήματος της Αυτοκρατορίας, αραβικές κατακτήσεις κτλ.) είναι ασφαλώς παράγοντες που δεν πρέπει να αγνοηθούν. Πρέπει, όμως, να παρατηρήσουμε ότι η αρχαία επιστήμη ήταν ανέκαθεν έργο λίγων ατόμων και η επίκληση τέτοιων γενικής φύσης παραγόντων δεν είναι αρκετή προκειμένου να εξηγήσει συμπεριφορές και δραστηριότητες ολιγομελών ομάδων ή ξεχωριστών προσώπων. Πιο γόνιμο είναι να αναζητήσουμε την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα αφ' ενός στη **διακοπή της προφορικής παράδοσης** της αρχαίας επιστήμης και αφ' ετέρου στο ιδεολογικό υπόβαθρο των **φιλοσοφι-**

κών και των θρησκευτικών κινημάτων που αναπτύσσονται την περίοδο αυτή.

Μια πλευρά της αρχαίας ελληνικής επιστήμης στην οποία ως τώρα δε δώσαμε προσοχή είναι η πλευρά της διδασκαλίας και της μετάδοσής της μέσα στο χρόνο. Το γεγονός ότι ασχοληθήκαμε μόνο με γραπτές πηγές δεν πρέπει να μας κάνει να παραβλέψουμε ότι παράλληλα προς τα κείμενα υπήρχε μια προφορική παράδοση επικοινωνίας και μετάδοσης γνώσεων. Έργα όπως τα *Κωνικά* του Απολλωνίου ή η *Μεγίστη* του Πτολεμαίου, προϊόντα και τα δύο της πιο πρωτοπόρας έρευνας της εποχής τους, δε θα είχαν τόση αξία αν δε συνοδεύονταν από προφορικές εξηγήσεις. Η μελέτη, για παράδειγμα, μιας απόδειξης του Απολλωνίου απαιτεί κόπο και προσήλωση. Η εντελώς ρητορική μορφή διατύπωσης την καθιστά μακροσκελή, ενώ κάθε ευθύγραμμο τμήμα υποδεικνύεται με δύο γράμματα τα οποία πρέπει κάθε φορά να εντοπίζονται στο σχήμα. Το κυριότερο, όμως, είναι ότι οι αποδείξεις δεν αποκαλύπτουν το κίνητρο, τον τρόπο του σκέπτεσθαι του συγγραφέα. Όλα αυτά δεν προκαλούν πρόβλημα όσο η ερευνητική παράδοση συνοδεύεται από την εκπαιδευτική δραστηριότητα. Σε μια προφορική εξήγηση τα ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να υποδειχθούν με τα δάκτυλα. Μπορεί να τονίσει κανείς τα ουσιώδη και να επισημάνει πώς βρέθηκε η απόδειξη. Αυτά, όμως, απουσιάζουν από τη γραπτή διατύπωση κατά το αυστηρό κλασικό πρότυπο. Οι αποδείξεις είναι λογικά στέρεες, αλλά δεν αποκαλύπτουν την έμπνευση, την



Ο Πυθαγόρας και ο Βοήθιος. Εικόνα από ένα βιβλίο αριθμητικής του 1504. Ο Πυθαγόρας, δεξιά, κάθεται μπροστά από έναν άβακα. Ο Βοήθιος, αριστερά, κάθεται μπροστά από έναν δίσκο με αραβικά ψηφία, τα οποία, όπως πίστευαν τότε, ήταν δική του εφεύρεση. Πίσω, σε ρόλο κριτή, βρίσκεται η Αριθμητική. Η χολωμένη έκφραση του Πυθαγόρα δείχνει ότι αυτός είναι ο χαμένος.

κατευθυντήρια γραμμή σκέψης. Όσο δεν υπήρχε διακοπή, όσο κάθε γενιά μετέδιδε τις μεθόδους της στην επόμενη, όλα βάδιζαν ομαλά και η επιστήμη ανθούσε. Αλλά αμέσως μόλις εξωτερικές αιτίες επέφεραν τη **διακοπή της προφορικής παράδοσης** και δεν απέμειναν παρά μόνο τα βιβλία, η αφομοίωση του έργου των μεγάλων προδρόμων κατέστη εξαιρετικά δύσκολη και η υπέρβασή τους σχεδόν αδύνατη. Με αυτά τα δεδομένα, μαθηματικοί και ευρυμαθείς λόγιοι, όπως ο Πάππος, ο Πρόκλος, ο Ευτόκιος ή ο Σιμπλίκιος, είχαν ενώπιόν τους, όπως κι εμείς σήμερα, τα κείμενα από το μακρινό παρελθόν, δεν μπορούσαν όμως να αντλήσουν σχεδόν τίποτε από την προφορική παράδοση που τα συνόδευε παλαιότερα. Κατόπιν αυτού, αναδείχθηκε σε σημαντική δραστηριότητα η συγγραφή σχολίων (ποικίλης ποιότητας), τα οποία επεξηγούσαν και ανέπτυσσαν τα ασαφή και σκοτεινά σημεία των κειμένων, παρέθεταν κάθε είδους μαρτυρία που φαινόταν να ρίχνει λίγο φως στο θέμα που πραγματεύονταν, και καμιά φορά πρόσθεταν και κάποιο νέο αποτέλεσμα.

Ας έλθουμε τώρα στο δεύτερο παράγοντα που αναφέραμε πιο πάνω, στην επίδραση δηλαδή των φιλοσοφικών και των θρησκευτικών διδασκαλιών που αναπτύχθηκαν κατά την περίοδο αυτή. Από τον 3ο μ.Χ. αι. και μετά επικράτησε στους κύκλους των λογίων της Αλεξάνδρειας, της Αθήνας και άλλων πόλεων ένα φιλοσοφικό ρεύμα που είναι γνωστό ως *Νεοπλατωνισμός*. Όπως η ίδια η ονομασία του δηλώνει, ως βάση είχε τη φιλοσοφία του Πλάτωνα, μαζί μ' αυτή όμως συμπεριέλαβε και πλήθος άλλων δοξασιών. Αυτό που πρέπει να τονιστεί είναι ότι ο Νεοπλατωνισμός ήταν, κυρίως, ***φιλοσοφία της αποκάλυψης***. Πρέσβευε ότι οι βαθύτερες αλήθειες δεν αποκτώνται μόνο με την εμπειρική έρευνα, με την παρατήρηση και με τον ορθό λόγο, αλλά αποκαλύπτονται από το Θεό. Τα έργα του Πλάτωνα, του Νικομάχου, όλων των σοφών του παρελθόντος, είναι προϊόντα τέτοιων αποκαλύψεων και, επομένως, μέσα σ' αυτά έπρεπε να αναζητηθεί η αλήθεια. Έτσι, η μελέτη, η εμβάθυνση και ο σχολιασμός των έργων του παρελθόντος έγινε σιγά σιγά η οδός για την αναζήτηση της αλήθειας. Η ανεπηρέαστη έρευνα της φύσης και η μαθηματική έρευνα βαθμιαία ατόνησαν.

Την ίδια περίοδο, εξάλλου, ο **Χριστιανισμός** εξελίχθηκε σε σημαντική θρησκευτική δύναμη και, από τον 4ο μ.Χ. αι., σε επίσημη κρατική θρησκεία του ανατολικού τμήματος της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας. Ο ρόλος που έπαιξε η νέα θρησκεία στην ιστορία της επιστήμης αποτέλεσε αντικείμενο διχογνωμιών μεταξύ των ιστορικών, και οι ακραίες θέσεις που διατυπώθηκαν είναι από τη μια πλευρά ότι αποτέλεσε εμπόδιο στην ανάπτυξη της επιστήμης και από την άλλη ότι δεν άσκησε την παραμικρή αρνητική επίδραση στην εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης. Το πρόβλημα είναι εξαιρετικά περίπλοκο και η ολοκληρωμένη διερεύνησή του υπερβαίνει τις απαιτήσεις αυτού του βιβλίου. Μπορούμε, όμως, να αναφερθούμε σε μερικές γενικές δια-

πιστώσεις σχετικές με το ρόλο της νέας θρησκείας στην εξέλιξη της επιστήμης. Κατά τους πρώτους χριστιανικούς αιώνες δεν υπήρξε ενιαία στάση από την πλευρά της εκκλησίας απέναντι στην αρχαία κληρονομιά. Τα έργα των Αποστολικών Πατέρων, των Απολογητών και των άλλων εκκλησιαστικών συγγραφέων αντικατοπτρίζουν τη σχετική αντιπαλότητα και πνευματική ζύμωση. Πολλοί από αυτούς ενθάρρυναν την κοσμική εκπαίδευση ως αναγκαία προϋπόθεση για τη μελέτη και τη διάδοση της Βίβλου. Ακόμη, η επεξεργασία και η υπεράσπιση της χριστιανικής πίστης έναντι των λόγιων οπαδών άλλων φιλοσοφικών τάσεων (δραστηριότητα που είναι γνωστή ως «απολογητική») τους υποχρέωνε να μελετήσουν τα λογικά εργαλεία που είχε δημιουργήσει η ελληνική φιλοσοφία. Επίσης, είναι γεγονός ότι στους κόλπους των πρώτων χριστιανών συγγραφέων υπήρξαν φωτεινοί στοχαστές, που με την κριτική τους σε πλευρές της αρχαίας επιστημονικής σκέψης συνέβαλαν ώστε να διατηρηθεί ζωντανή η επιστημονική παράδοση σε καιρούς που δεν ήσαν ευνοϊκοί γι' αυτή, ενώ, τέλος, θα πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι η διάσωση της αρχαίας επιστημονικής κληρονομιάς οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στους μοναχούς της βυζαντινής εποχής.

Όμως αρκετό χώρο αφιερώσαμε στη συζήτηση τη σχετική με την παρακμή της αρχαίας ελληνικής επιστήμης. Ας αλλάξουμε τώρα κλίμα κι ας επιστρέψουμε για λίγο στις αρχές αυτής της περιόδου, για να εξετάσουμε το έργο του τελευταίου εκπροσώπου των μεγάλων μαθηματικών της αρχαιότητας, του Διοφάντου.

1.2 Μια ιδιάζουσα περίπτωση: Τα «Αριθμητικά» του Διοφάντου

Όπως για τους περισσότερους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς δε γνωρίζουμε με βεβαιότητα πότε ακριβώς έζησε ο Διόφαντος. Από το γεγονός ότι σε ένα έργο του μνημονεύει το μαθηματικό Υψικλή, που έζησε το 2ο π.Χ. αι., ενώ μνημονεύεται για πρώτη φορά από το Θέωνα τον Αλεξανδρινό, που έζησε τον 4ο μ.Χ. αι., συμπεραίνουμε ότι ο Διόφαντος έζησε σε μια εποχή που τοποθετείται κάπου στο διάστημα αυτών των έξι αιώνων. Αυτό μόνο μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα για την εποχή του. Πάντως, υπάρχει μια πληροφορία που παραθέτει ο βυζαντινός λόγιος Μιχαήλ Ψελλός (1018-1078), σύμφωνα με την οποία ο Ανατόλιος (που το 270 μ.Χ. έγινε επίσκοπος Λαοδικείας) είχε αφιερώσει ένα βιβλίο του στο Διόφαντο· εάν η πληροφορία αυτή ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, τότε μπορούμε να εικάσουμε ότι η ακμή του Διοφάντου τοποθετείται στα μέσα του 3ου μ.Χ. αιώνα.

Το πιο σημαντικό έργο του Διοφάντου είναι τα *Αριθμητικά* [*προβλήματα*], αποτελούμενο από δέκα τρία βιβλία από τα οποία σήμερα σώζονται τα δέκα - έξι στο πρωτότυπο ελληνικό κείμενο και τέσσερα σε μια μεσαιωνική αραβική μετάφραση του 9ου αι., που εκπόνησε ο ελληνικής καταγωγής Κουστά Ιμπν Λούκα. Η επίδρα-

ση που άσκησε το έργο αυτό στη γέννηση των νεότερων μαθηματικών από τον François Viète (Φρανσουά Βιέτ), τον René Descartes (Ρενέ Ντεκάρτ) και τους άλλους μαθηματικούς του 17ου αι. είναι πολύ μεγάλη και θα μπορούσαμε να τη συνοψίσουμε επαναλαμβάνοντας τα ακόλουθα λόγια του Γερμανού φιλοσόφου και ιστορικού των μαθηματικών Jacob Klein (Γιάκομπ Κλάιν, 1899-1978): «Η νεότερη άλγεβρα και ο νεότερος φορμαλισμός αναπτύχθηκαν από την άμεση ενασχόληση του Viète με τον Διόφαντο. Οι μεταγενέστεροι συγγραφείς απλώς επεξεργάστηκαν περαιτέρω και λεπτομερέστερα το έργο του (του Viète)». Ας δούμε, όμως, πιο λεπτομερώς σε τι συνίσταται η μεγάλη προσφορά του Διοφάντου.

Στην αρχή του πρώτου βιβλίου των *Αριθμητικών* ο Διόφαντος έχει προτάξει μια Εισαγωγή όπου πραγματεύεται το θέμα της επίλυσης προβλημάτων που ισοδυναμούν με αλγεβρικές εξισώσεις με έναν ή περισσότερους αγνώστους ή με συστήματα εξισώσεων. Η Εισαγωγή αυτή έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ιστορικούς των μαθηματικών ως **το αρχαιότερο εγχειρίδιο άλγεβρας** στην ιστορία των μαθηματικών. Ας δούμε πώς τεκμηριώνεται αυτός ο ισχυρισμός.

Πρώτα πρώτα ο Διόφαντος εισάγει μια ειδική ορολογία, καθώς και μια σειρά από συντομογραφίες για την παράσταση των διαδοχικών δυνάμεων του αγνώστου (των «ειδών», όπως λέει ο ίδιος) μέχρι και την έκτη δύναμη. Ο πίνακας που ακολουθεί συνοψίζει τόσο την ορολογία όσο και τις αντίστοιχες συντομογραφίες:

Συντομογραφία	***Ορολογία Διοφάντου***	***Σύγχρονος συμβολισμός***
$\overset{0}{\mathrm{M}}$	*Μονάς*	x^0
ς	*Αριθμός*	x
Δ^{Υ}	*Δύναμις*	x^2
K^{Υ}	*Κύβος*	x^3
$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	*Δυναμοδύναμις*	x^4
$\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$	*Δυναμόκυβος*	x^5
$\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$	*Κυβόκυβος*	x^6

Αν στις παραπάνω συντομογραφίες επισυναφθεί ως εκθέτης ένα σύμβολο που μοιάζει με «χ», τότε δηλώνεται η αντίστοιχη αρνητική δύναμη. Για παράδειγμα, η έκφραση $\Delta^{\Upsilon\chi}$ προφέρεται «δυναμοστόν» και αντιστοιχεί στο $1/x^2$, η $ς^{\chi}$ προφέρεται «αριθμοστόν» και αντιστοιχεί στο $1/x$ και ούτω καθεξής. Οι αριθμητικοί συντελεστές που δηλώνουν το πλήθος κάθε φορά των «ειδών» σε μια αριθμητική σχέση γράφονται με το γνωστό ελληνικό αλφαβητικό σύστημα· σε αντίθεση όμως με τη σημερινή πρακτική οι συντελεστές να προτάσσονται του συμβόλου του αγνώστου, στο Διόφαντο έπονται της συντομογραφίας του εκάστοτε «είδους». Έτσι, το μονώνυμο

$5x^4$, για να χρησιμοποιήσουμε ένα σύγχρονο όρο, γράφεται $\Delta^{Y}\Delta$ ε΄, ενώ το $3/x^2$ γράφεται $\Delta^{Y\chi}$ γ΄. Με τον τρόπο αυτό ο Διόφαντος μπορεί να γράψει κάθε μονώνυμο αx^m, όπου m ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του - 6 και μικρότερος ή ίσος του + 6.

Η καινοτομία του Διοφάντου, όμως, δε συνίσταται τόσο στην επινόηση των παραπάνω συντομογραφιών. Το κρίσιμο σημείο (που «άφησε εποχή» όπως έγραψε ένας ιστορικός των μαθηματικών τον περασμένο αιώνα) είναι ότι εισάγει τις συντομογραφίες στο λογιστικό μέρος της επιλυτικής διαδικασίας των προβλημάτων· με άλλα λόγια, αναπτύσσει ένα λογισμό με τα «είδη» που δηλώνουν οι συντομογραφίες, επεκτείνοντας με τον τρόπο αυτό το πεδίο εφαρμογής των αριθμητικών πράξεων, ώστε αυτό να περιλαμβάνει όχι μόνο τους αριθμούς αλλά και τα «είδη». Αυτό ακριβώς το στοιχείο είναι που περισσότερο από κάθε άλλο προσδίδει αλγεβρικό χαρακτήρα στο έργο του Διοφάντου. Για να το επιτύχει αυτό, χρησιμοποιεί ένα ειδικό σύμβολο (⋔), που ονομάζεται «λεῖψις», με το οποίο δηλώνει την πράξη της αφαίρεσης μεταξύ «ειδών», ενώ για την πράξη της πρόσθεσης αρκείται στην εν σειρά παράθεση των συντομογραφιών.

Με τον τρόπο αυτό ο Διόφαντος είναι σε θέση να γράψει μια αλγεβρική εξίσωση με έναν άγνωστο, όπως είναι η εξίσωση
$x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1$
στο πρόβλημα VI.17, ως εξής (διευκρινίζεται ότι τα «προστιθέμενα» είδη τοποθετούνται όλα μαζί μπροστά από τα «αφαιρούμενα»):
Δ^{Y} α΄ ς β΄ $\overset{o}{M}$ γ΄ ἔστιν ἴσος
K^{Y} α΄ ς γ΄ ⋔ Δ^{Y} γ΄ $\overset{o}{M}$ α΄.

Ο λογισμός με τα «είδη» συμπληρώνεται με τη διατύπωση του κανόνα για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ προστιθέμενων και αφαιρούμενων «ειδών«: «Λεῖψις ἐπί λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν». Ο κανόνας αυτός δεν πρέπει να ερμηνεύεται ως κανόνας των προσήμων για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ αρνητικών και θετικών αριθμών· στο αριθμητικό σύμπαν του Διοφάντου, όπως και ολόκληρης της αρχαίας επιστήμης, δεν είχαν θέση οι αρνητικοί αριθμοί. Ο παραπάνω κανόνας εξυπηρετούσε απλώς την εκτέλεση πολλαπλασιασμών της μορφής $(\alpha \pm \beta)(\gamma \pm \delta)$.

	Δ^{Y} ᾱ		μ^{o} ι̅ϛ̅ ⋔ Δ^{Y} ᾱ
			ςς β̅ ⋔ μ^{o} δ
	Δ^{Y} δ̅ μ^{o} ι̅ϛ̅ ⋔ ςς ι̅ϛ̅	ἴσ.	μ^{o} ι̅ϛ̅ ⋔ Δ^{Y} ᾱ
πρ.	Δ^{Y} ε̅ μ^{o} ι̅ϛ̅	ἴσ.	ςς ι̅ϛ̅ μ^{o} ι̅ϛ̅
ἀφ.	Δ^{Y} ε̅	ἴσ.	ςς ι̅ϛ̅
μερ.	Δ^{Y} ᾱ	ἴσ.	ςς γ̅ ε″
	ς ᾱ		μ^{o} γ̅ ε″ ἢ ι̅ϛ̅ ε^{α}
ὑπ.	ι̅ϛ̅ ε^{α}		μ^{o} β̅, β̅ ε^{α} ἢ ι̅β̅ ε^{α} μ^{o}
	σ̅ν̅ϛ̅		ρ̅μ̅δ̅.

Συνοπτική παρουσίαση της επίλυσης του προβλήματος II.8 των Αριθμητικών *του Διοφάντου από το Βυζαντινό σχολιαστή Μάξιμο Πλανούδη.*

Στο τέλος της Εισαγωγής ο Διόφαντος διατυπώνει τις δύο βασικές πράξεις του λογισμού των εξισώσεων που χρησιμοποιούμε και σήμερα, όταν θέλουμε να φέρουμε μια εξίσωση στην τελική μορφή της: τη μεταφορά όρων από το ένα μέλος στο άλλο και την αναγωγή των ομοίων όρων. Με τις πράξεις αυτές ο Διόφαντος μετασχηματίζει τις εξισώσεις των *Αριθμητικών*, ώστε να λάβουν ή την απλή μορφή της ισότητας δύο «ειδών» ($\alpha x^m = \beta x^n$) ή, όταν αυτό δεν είναι δυνατόν, τη μορφή μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Αυτό είναι με λίγα λόγια το περιεχόμενο της Εισαγωγής των *Αριθμητικών*. Η παρουσίαση που προηγήθηκε φανερώνει τον **αλγεβρικό χαρακτήρα** του έργου, το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο στάδιο στην εξέλιξη της άλγεβρας. Το στάδιο αυτό έχει ονομαστεί από τους ιστορικούς των μαθηματικών «συγκεκομμένη άλγεβρα», για να διακρίνεται, έτσι, από τη «συμβολική άλγεβρα» που εισήγαγε ο Viète με το έργο του *In artem analyticem Isagoge* [Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη] το 1591, την οποία χρησιμοποιούμε έως σήμερα.

2 ΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΟ ΜΕΣΑΙΩΝΑ

Από την εποχή της παρακμής της ελληνικής επιστήμης έως την αναβίωση των κλασικών γραμμάτων και των επιστημονικών σπουδών στην Ευρώπη το 15ο και το 16ο αι. πέρασαν περισσότερα από χίλια χρόνια. Αυτή η μακρά περίοδος, που να ονομάζεται Μεσαίωνας, δεν ήταν, όπως θα δούμε, τόσο «σκοτεινή» σε ό,τι αφορά την επιστημονική δραστηριότητα, όσο παρουσιάζεται συνήθως. Η ιστορία της επιστήμης μπορεί να αποτελέσει σ' αυτή την περίπτωση το μέσο για να αρθεί αυτή η προκατάληψη, που ακόμα και σήμερα εξακολουθεί να παραμένει ισχυρή. Στη διάρκεια αυτής της χιλιετίας, ο ισλαμικός πολιτισμός, το Βυζάντιο και ο λατινικός ευρωπαϊκός κόσμος (ιδιαίτερα από το 13ο αι. και μετά) παρέχουν αξιόλογα δείγματα επιστημονικής δραστηριότητας, η οποία δεν περιορίζεται στη διατήρηση, στη μελέτη και στη μετάδοση των γνώσεων που κληροδότησε η αρχαιότητα, αλλά συνοδεύεται συχνά με πρωτότυπες συνεισφορές στην κατεύθυνση τόσο του εμπλουτισμού όσο και της γόνιμης κριτικής και υπέρβασης μερικών πλευρών της αρχαίας κληρονομιάς.

2.1 Οι επιστήμες στο Βυζάντιο

Η προσφορά του Βυζαντίου στην ιστορία των επιστημών δε συνίσταται στην αύξηση του σώματος των γνώσεων που παρέδωσε η ελληνική αρχαιότητα. Αν και δεν

έλειψαν εντελώς ούτε οι πρωτότυπες συνεισφορές σε ιδέες και μεθόδους ούτε οι πρακτικές εφαρμογές των επιστημονικών γνώσεων στον καθημερινό βίο, αυτό που κυρίως χαρακτηρίζει τη βυζαντινή επιστήμη είναι η διαφύλαξη και παράδοση πολλών επιτευγμάτων της αρχαιότητας, αφ' ενός με την αντιγραφή και τη διάσωση των κειμένων και αφ' ετέρου με την ανθολόγηση, την ερμηνεία και το σχολιασμό τους. Το Βυζάντιο αποτέλεσε σημαντική οδό διάσωσης και μετάδοσης της αρχαίας ελληνικής επιστήμης προς την Ανατολή (Ισλάμ) και προς τη Δύση, και ταυτόχρονα, ιδίως κατά τους τελευταίους αιώνες, χώρο γόνιμης συνάντησης της ελληνικής με άλλες επιστημονικές παραδόσεις και, κυρίως, με την ακμάζουσα αραβική επιστήμη.

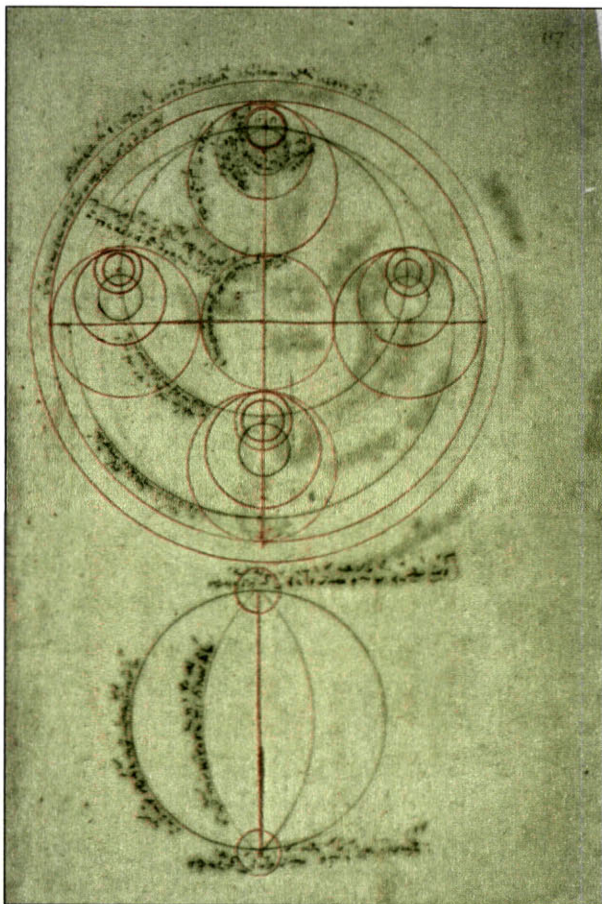
Στη διάρκεια της βυζαντινής χιλιετίας η επιστημονική δραστηριότητα γνώρισε περιόδους άνθησης, τις οποίες διαδέχονταν μακρές περίοδοι στασιμότητας. Οι εποχές της ακμής αντιστοιχούν σε αδρές γραμμές στις εποχές της γενικότερης άνθησης του βυζαντινού πολιτισμού. Τρεις είναι οι περίοδοι έξαρσης της επιστημονικής δραστηριότητας: η πρώτη, που εκτείνεται ως την εποχή της βασιλείας του Ιουστινιανού (527-565), αποτελεί ουσιαστικά την τελευταία αναλαμπή των σχολών της αρχαιότητας· η δεύτερη περίοδος, που είναι γνωστή ως *πρώτη βυζαντινή αναγέννηση*, έλαβε χώρα τον 9ο και το 10ο αι. και είχε ως κεντρική μορφή το Λέοντα το Μαθηματικό (ή Φιλόσοφο), ενώ, τέλος, η επονομαζόμενη *δεύτερη βυζαντινή αναγέννηση* κορυφώθηκε στα τέλη του 13ου και στις αρχές του 14ου αιώνα.

2.1.1 Πρωτοβυζαντινή περίοδος

Στη διάρκεια της πρώτης περιόδου η βυζαντινή επιστήμη αποτελεί φυσική συνέχεια της επιστήμης της ύστερης αρχαιότητας. Δεν υπάρχει σαφής διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο. Η οργάνωση της εκπαίδευσης, εξάλλου, δεν άλλαξε σημαντικά. Οι σχολές της ύστερης αρχαιότητας λειτουργούσαν χωρίς ουσιαστικές αλλαγές στο περιεχόμενο των σπουδών τους ακόμη και έως τον 6ο μ.Χ. αιώνα· έτσι η εκπαίδευση ενός νέου του 5ου ή του 6ου αι. δε διέφερε από την εκπαίδευση ενός νέου του 3ου αιώνα.

Στις αρχές του 5ου αι. οι πιο σημαντικές σχολές όπου διδάσκονταν οι επιστήμες βρίσκονταν στην Αθήνα, στην Αλεξάνδρεια και στην Κωνσταντινούπολη. Η *σχολή των Αθηνών* διατηρήθηκε ως το 529, οπότε έκλεισε με διάταγμα του Ιουστινιανού. Την κεντρική θέση στη διδασκαλία κατείχαν τα μαθηματικά, η γνώση των οποίων ήταν κατά τους Νεοπλατωνικούς, που διηύθυναν τη σχολή, προϋπόθεση για την κατανόηση των προβλημάτων της φιλοσοφίας. Ο επιφανέστερος εκπρόσωπος της σχολής ήταν ο Πρόκλος (410-485), στον οποίο αναφερθήκαμε σε προηγούμενη ενότητα με αφορμή τα *Σχόλιά* του στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Ενώ στην Αθήνα θεωρούσαν τη διδασκαλία των μαθηματικών απλώς προπαιδευτική για την εισαγωγή στη φιλοσοφία, στη *σχολή της Αλεξάνδρειας* η εκπαίδευση ήταν προσανατολισμένη προς τις επιστήμες αυτές καθαυτές. Στη σχολή αυτή έδρασαν δύο από τους πιο προικισμένους εκπροσώπους της σχολιαστικής παράδοσης της εποχής εκείνης: ο σχολιαστής του Αριστοτέλη Σιμπλίκιος και ο Ιωάννης Φιλόπονος ή Γραμματικός, στον οποίο θα πρέπει να σταθούμε λίγο περισσότερο, καθώς υπήρξε το πιο κριτικό επιστημονικό πνεύμα της πρωτοβυζαντινής περιόδου. Στα έργα του *Εξηγητική κοσμογονία* και *Κατά των Πρόκλου, περί αϊδιότητος του κόσμου* και στα υπομνήματά του στη *Φυσική ακρόαση* του Αριστοτέλη ο Φιλόπονος υπέβαλε σε αυστηρή κριτική την αριστοτελική κοσμολογία και δυναμική. Οι αντιρρήσεις του εστιάζονται, κυρίως, στις θέσεις για την αιωνιότητα του κόσμου, τη μη ύπαρξη κενού χώρου, το συσχετισμό της κινούσας δύναμης με την ταχύτητα και την αντίσταση του υλικού μέσου. Ξεχωριστή σημασία για την ιστορία της επιστήμης έχει η κριτική του Φιλόπονου στην αριστοτελική θεωρία της *αντιπερίστασης* (βλ. κεφ. 2, ενότητα 4). Χρησιμοποιώντας λογικά επιχειρήματα και επικαλούμενος νοητικά πειράματα, ο Φιλόπονος απέρριψε τη θεωρία ότι ο αέρας είναι αυτός που μετά την απομάκρυνση του βέλους αναλαμβάνει το ρόλο του κινούντος και διατύπωσε τη θεωρία περί μιας ωθητικής δύναμης (impetus), που εντυπώνεται στο βέλος από το κινούν και είναι υπεύθυνη για τη συνέχιση της κίνησής του. Η θεωρία αυτή γνώρισε μεγάλη απήχηση στη Δυτική Ευρώπη κατά τη διάρκεια του ύστερου Μεσαίωνα.



Σελίδα από βυζαντινό αστρονομικό χειρόγραφο των αρχών του 14ου αιώνα.

2.1.2 Πρώτη βυζαντινή αναγέννηση

Στην Κωνσταντινούπολη, κατά τη διάρκεια της βασιλείας του Ηρακλείου (610-641) επαναλειτούργησε το πανεπιστήμιο, το οποίο είχε ιδρυθεί στις 27 Φεβρουαρίου του 425 από το Θεοδόσιο το Β΄, η λειτουργία του όμως διακόπηκε αρχικά επί Ιουστινιανού και αργότερα, το 726, επί Λέοντος Γ΄ του Ισαύρου. (Οφείλουμε εδώ να διευκρινίσουμε ότι χρησιμοποιούμε τον όρο «πανεπιστήμιο» συμβατικά, για να δηλώσουμε το κρατικό ανώτατο εκπαιδευτικό ίδρυμα που κατά καιρούς είχε διάφορες ονομασίες, όπως «αυτοκρατορικό auditorium», «οικουμενικόν διδασκαλείον», «πανδιδακτήριον» κ.ά.). Η επιστημονική δραστηριότητα στην πρωτεύουσα δεν πρέπει να ήταν αξιόλογη στη διάρκεια του 7ου και του 8ου αι., αρχίζει όμως να παρουσιάζει αξιόλογες εκφράσεις μετά την εποχή του αυτοκράτορα Θεόφιλου (829-842). Η πιο σημαντική πνευματική προσωπικότητα των αρχών του 9ου αι. είναι ο Λέων ο Μαθηματικός (ή Φιλόσοφος), ο οποίος γεννήθηκε γύρω στο 790 και έζησε τουλάχιστον ως το 869. Το 863 ανέλαβε τη διεύθυνση του ανασυσταθέντος πανεπιστημίου της Μαγναύρας, όπου δίδαξε φιλοσοφία και μαθηματικά. Ο Λέων επινόησε ένα είδος οπτικού τηλεγράφου, ασχολήθηκε με την αστρολογία, ενώ στις δικές του παραδόσεις ανάγονται τα αρχαιότερα σωζόμενα σχόλια στον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Πρωτότυπη συμβολή του Λέοντα στην εξέλιξη της άλγεβρας είναι η χρήση γραμμάτων για την παράσταση αριθμητικών ποσοτήτων. Ανεκτίμητης αξίας είναι τέλος η συμβολή του στη διάσωση των μεγάλων επιστημονικών έργων της αρχαιότητας, αφού στην εποχή του συντάχθηκαν, μεταγραμμένοι στη μικρογράμματη γραφή, οι περγαμηνοί κώδικες, που αποτελούν τη βάση της χειρόγραφης παράδοσης των επιστημονικών έργων των αρχαίων συγγραφέων.

Το 1045 ο Αυτοκράτωρ Κωνσταντίνος Θ΄ ο Μονομάχος αναδιοργάνωσε το πανεπιστήμιο και διόρισε Ύπατο των Φιλοσόφων το Μιχαήλ Ψελλό (1018-1078), ο οποίος δίδαξε τη μαθηματική *τετρακτύν*, αν και οι επιστήμες δεν ήταν στο επίκεντρο των ενδιαφερόντων του.

Ο 11ος αι. παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για την ιστορία της αστρονομίας, στην οποία αρχίζουν να διαμορφώνονται δύο ρεύματα. Το πρώτο, που θα μπορούσε να ονομαστεί παραδοσιακό, στόχευε στην ανασύσταση της αρχαίας ελληνικής αστρονομίας, τα έργα όμως που κατανοούνταν απ' αυτήν ήταν δεύτερης γραμμής. Το ρεύμα αυτό αντιπροσωπεύεται από πολλά χειρόγραφα των αρχών του 11ου αιώνα. Το δεύτερο ρεύμα συνδέεται με την επίδραση αραβικών αστρονομικών έργων του 9ου και του 10ου αιώνα.

2.1.3 Δεύτερη βυζαντινή αναγέννηση



Γεώργιος Παχυμέρης

Η περίοδος της λατινικής κατοχής (1204-1261) που ακολούθησε την πτώση της Κωνσταντινούπολης στους σταυροφόρους της Τετάρτης Σταυροφορίας επέφερε γενική παρακμή. Ο αριθμός των χειρογράφων που καταστράφηκαν ή διασκορπίστηκαν με κατεύθυνση κυρίως προς τη Δύση είναι δύσκολο να εκτιμηθεί, ενώ ένας μεγάλος αριθμός λογίων εγκατέλειψε την πρωτεύουσα και βρήκε καταφύγιο στην αυλή του αυτοκράτορα της Νικαίας Θεόδωρου Α΄ Λάσκαρι (1204-1222), αναδεικνύοντας την αυτοκρατορία της Νίκαιας σπουδαίο πνευματικό κέντρο.

Στην αρχή η έλλειψη εκπαιδευτικών ιδρυμάτων, κτιρίων, βιβλιοθηκών και η σπανιότητα των βιβλίων αποτέλεσαν ανασχετικό παράγοντα για την πνευματική ζωή, αργότερα όμως οι αυτοκράτορες Ιωάννης Γ΄ Δούκας Βατάτζης (1222-1254) και Θεόδωρος Β΄ Δούκας Λάσκαρις (1254-1258) οργάνωσαν την εκπαίδευση, ίδρυσαν βιβλιοθήκες και φρόντισαν να συγκεντρώσουν βιβλία. Η πιο αξιόλογη πνευματική προσωπικότητα της αυτοκρατορίας της Νίκαιας ήταν ο Νικηφόρος Βλεμμύδης (περ. 1197/98-1272).

Μαθητής του Βλεμμύδη ήταν ο Γεώργιος Ακροπολίτης (1217-1282). Μετά την απελευθέρωση της Κωνσταντινούπολης (1261) κατέλαβε υψηλά πολιτικά αξιώματα ανέλαβε τη διεύθυνση του αναδιοργανωμένου κρατικού πανεπιστημίου, όπου δίδαξε φιλοσοφία αλλά και γεωμετρία από τον Ευκλείδη και αριθμητική από το Νικόμαχο. Ο πιο προικισμένος από τους μαθητές του Ακροπολίτη ήταν ο Γεώργιος Παχυμέρης (περ. 1242-1310) στον οποίο οφείλουμε τη σημαντικότερη *τετρακτύ* που γράφτηκε στο Βυζάντιο (*Τετράβιβλος ή Σύνταγμα των τεσσάρων μαθημάτων*). Η επιλογή του να βασιστεί για τη συγγραφή του κεφαλαίου της αριθμητικής στο έργο

του Διοφάντου δε δείχνει μόνο μεγάλη εξοικείωση με αυτό, αλλά αποκαλύπτει και μια ιδιαίτερη ερμηνεία του, την αριθμοθεωρητική ερμηνεία, που το 17ο αι. θα αποδώσει πλούσιους καρπούς στα χέρια μαθηματικών, όπως του Bachet de Méziriac (Μπασέ ντε Μεζιριάκ, 1581-1638), του Pierre Fermat (Πιέρ Φερμά, 1601-1665) κ.ά.

Ο σημαντικότερος εκπρόσωπος της αναγέννησης των πρώτων Παλαιολόγων και ένας από τους ευρυμαθέστερους και πολυγραφότερους βυζαντινούς λογίους ήταν ο Μάξιμος Πλανούδης (1255-1305 ή 1260-1310). Η γνώση της Λατινικής του επέτρεψε να μεταφράσει πολλά θεολογικά και κλασικά έργα. Τα κύρια ενδιαφέροντά του, όμως, ήταν η έκδοση, ο σχολιασμός και η ανθολόγηση αρχαίων ελληνικών κειμένων. Στα επιστημονικά έργα που εξέδωσε περιλαμβάνονται τα *Φαινόμενα* του Αράτου, τα οποία σχολίασε, τα *Σφαιρικά* του Θεοδοσίου, τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και τα *Αριθμητικά* του Διοφάντου, των οποίων σχολίασε τα δύο πρώτα βιβλία. Έγραψε, επίσης, ένα έργο με τον τίτλο *Ψηφηφορία κατ' Ινδούς η λεγομένη μεγάλη.*

Με τη βασιλεία του Ανδρόνικου Β΄ (1282-1328) άρχισε μια νέα λαμπρή εποχή για την πνευματική ζωή στο Βυζάντιο, στην οποία άνθισαν όλες οι επιστήμες, κυρίως όμως η αστρονομία. Γι' αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η χρυσή εποχή της βυζαντινής αστρονομίας, της οποίας ανθούν και τα δύο ρεύματα που είχαν αρχίσει να διαμορφώνονται ήδη από τον 11ο αιώνα.



Θεόδωρος Μετοχίτης. Λεπτομέρεια από ψηφιδωτό της Μονής της Χώρας στην Κωνσταντινούπολη.

Ο πρώτος σημαντικός εκπρόσωπος του παραδοσιακού ρεύματος ήταν ο Θεόδωρος Μετοχίτης (1270-1332), που διακρίθηκε και ως πολιτικός. Γύρω στα 1316 ολοκλήρωσε τη συγγραφή της μνημειώδους *Στοιχειώσεως αστρονομικής*, μιας συστηματικής πραγματείας που δεν περιορίζεται απλώς στην πρακτική χρήση των αστρονομικών πινάκων, αλλά περιέχει αποδείξεις κατά

το πρότυπο της *Μεγίστης*. Μαθητής του Μετοχίτη ήταν ο Νικηφόρος Γρηγοράς (1293/94-1358/61). Έγραψε ένα λόγο προτρεπτικό στις αστρονομικές σπουδές και δύο δοκίμια για τον αστρολάβο. Στο ρεύμα αποκατάστασης της πτολεμαϊκής αστρονομίας πρέπει να αναφέρουμε ακόμη τον Θεόδωρο Μελιτηνιώτη (περ. 1310-1388), ο οποίος γύρω στο έτος 1352 έγραψε ένα έργο με τίτλο *Τρίβιβλος αστρονομική*, το πιο περιεκτικό και επιμελημένο βυζαντινό αστρονομικό σύγγραμμα (του οποίου πάντως το τρίτο βιβλίο έχει θέμα την περσική αστρονομία).

Κατά το δεύτερο μισό του 13ου αιώνα εισέδυσε ευρέως στο Βυζάντιο η περσοαραβική αστρονομία προερχόμενη από μια πόλη στα βόρεια του Ιράν, την Ταυρίδα (Tabriz), που είχε εξελιχθεί σε διεθνές κέντρο της αραβικής επιστήμης. Η διείσδυση στο Βυζάντιο αρχίζει με τις μεταφράσεις εγχειριδίων που έγιναν από τον Γρηγόριο (Γεώργιο) Χιονιάδη. Το 1347 δημοσιεύθηκε η *Εξήγησις εις την Σύνταξιν των Περσών* του Γεωργίου Χρυσοκόκκη. Οι πίνακές του βιβλίου του Χρυσοκόκκη αντιγράφτηκαν από τον Μελιτηνιώτη στο τρίτο βιβλίο της *Τριβίβλου* του, το οποίο γνώρισε και αυτοτελή ύπαρξη υπό τον τίτλο *Παράδοσις των περσικών κανόνων*. Από το τέλος του 14ου και διαρκούντος του 15ου αι. πολλαπλασιάστηκαν στο Βυζάντιο οι ξένες αστρονομικές επιδράσεις κυρίως μέσω των μεταφράσεων αστρονομικών πινάκων. Εκτός από τις μεταφράσεις ελάχιστα είναι τα πρωτότυπα έργα, όπως η αστρονομία του Γεωργίου Γεμιστού Πλήθωνα (περ. 1355-1451).

Οι τελευταίες δεκαετίες της Βυζαντινής αυτοκρατορίας δεν έχουν να επιδείξουν αξιόλογη παραγωγή επιστημονικών έργων. Οι τέσσερις μαθηματικές επιστήμες εξακολουθούσαν να διδάσκονται, οι δάσκαλοι όμως δεν ήταν μεγάλης επιστημονικής εμβέλειας, με εξαίρεση ίσως τον Ιωσήφ Βρυέννιο (περ. 1340-1430/31).

2.2 Η αραβική επιστήμη

Η επιστήμη που αναπτύχθηκε στους κόλπους του ισλαμικού πολιτισμού στη διάρκεια των επτά αιώνων που μεσολάβησαν από το 750 έως το 1450, ονομάζεται από άλλους «ισλαμική επιστήμη» και από άλλους «αραβική επιστήμη». Στην πραγματικότητα, κανένας από τους δύο αυτούς όρους δεν είναι απολύτως ικανοποιητικός. Ο πρώτος όρος παραπέμπει ρητά στις θρησκευτικές και κοινωνικοπολιτικές συνιστώσες του επιστημονικού φαινομένου που αναπτύχθηκε στην πιο πάνω περίοδο και δεν είναι απολύτως σωστός διότι, παρ' όλο που οι περισσότεροι από τους επιστήμονες που άκμασαν στον τότε ισλαμικό κόσμο ήσαν μουσουλμάνοι, υπήρχαν, ωστόσο, και επιστήμονες με άλλες θρησκευτικές πεποιθήσεις (χριστιανοί οπαδοί της αίρεσης του Νεστορίου, ιουδαίοι, σαβιανοί, οπαδοί του Ζωροάστρη κτλ.)· επίσης, μολονότι ένας αριθμός προβλημάτων τα οποία απασχόλησαν τους επιστήμονες

Δεν έχουμε τον χώρο εδώ να σταθούμε στην πολιτική ιστορία του Ισλάμ η οποία αρχίζει το έτος 622 μ.Χ. όταν ο Μωάμεθ φεύγει από τη Μέκκα, την πόλη στην οποία γεννήθηκε, για να βρει καταφύγιο στη Μεδίνα. Θα περιοριστούμε μόνο να σημειώσουμε ότι από το έτος 630 μ.Χ., όταν ο Προφήτης επέστρεψε θριαμβευτής στη Μέκκα, οι οπαδοί του ξεχύθηκαν σε έναν ιερό πόλεμο, το αποτέλεσμα του οποίου ήταν σε λιγότερο από έναν αιώνα να δημιουργηθεί μια τεράστια αυτοκρατορία η οποία το έτος 715 μ.Χ. εκτεινόταν από τα Πυρηναία ως τις παρυφές της Κίνας.

Στη διάρκεια των πρώτων δεκαετιών της ισλαμικής επέκτασης δεν μπορεί να γίνεται λόγος για καλλιέργεια της επιστήμης στους κόλπους της νέας αυτοκρατορίας. Η κατάκτηση όλο και περισσότερων γεωγραφικών περιοχών δεν άφηνε κανένα περιθώριο στους Μωαμεθανούς για να επιδοθούν στην κατάκτηση των «περιοχών της γνώσης». Αργότερα όμως έμελλε να διακριθούν και σ' αυτόν τον τομέα. Αυτό έγινε ιδιαίτερα μετά την άνοδο στην εξουσία των Χαλιφών της Δυναστείας των Αββασιδών που διαδέχθηκαν το 750 μ.Χ. τους Χαλίφες της Δυναστείας των Ομμεϋαδών.

στην εν λόγω περίοδο συνδέεται άμεσα με τους ισλαμικούς νόμους και τους κανόνες της μωαμεθανικής θρησκείας (ρύθμιση του χρόνου έναρξης μιας εκάστης εκ των πέντε καθημερινών προσευχών, προσανατολισμός προς την «ιερή» κατεύθυνση δηλ. προς το ιερό τέμενος Κάαβα στη Μέκκα, προβλήματα κληρονομιών σύμφωνα με το ισλαμικό δίκαιο κτλ.), το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών, της φυσικής, της αστρονομίας και της ιατρικής που αναπτύχθηκαν στους κόλπους του ισλαμικού πολιτισμού δεν συνδέεται άμεσα με τη θρησκεία. Από την άλλη πλευρά, ο όρος «αραβική επιστήμη» είναι περισσότερο δόκιμος υπό τη ρητή προϋπόθεση, όμως, ότι ο επιθετικός προσδιορισμός «αραβική» δεν έχει εθνολογική αλλά μόνο γλωσσική σημασία. Πράγματι, ένας μεγάλος αριθμός σημαντικών «αράβων» επιστημόνων, δεν ήσαν Άραβες. Ζούσαν στην Περσία και σε άλλες περιοχές, όμως η κύρια επιστημονική τους γλώσσα ήταν τα αραβικά. Με τις επιφυλάξεις αυτές κατά νου επιλέγουμε να χρησιμοποιούμε τον όρο «αραβική επιστήμη» διευκρινίζοντας όμως ρητά ότι με τον όρο αυτό θα εννοούμε την επιστημονική δραστηριότητα που ανέπτυξαν οι άνθρωποι που έζησαν στην περιοχή η οποία εκτείνεται χρονικά από τον 8ο μ.Χ. αι. ως τις απαρχές της νεότερης εποχής και γεωγραφικά από την Ιβηρική Χερσόνησο και τη Βόρεια Αφρική ως την κοιλάδα του Ινδού ποταμού και από τη νότια Αραβία ως την Κασπία Θάλασσα. Στην περιοχή αυτή, κατά το μεγαλύτερο μέρος της παραπάνω περιόδου επικρατούσε ο ισλαμικός πολιτισμός και τα επιστημονικά κείμενα συντάσσονταν, ως επί το πλείστον, στην αραβική γλώσσα.

Ας δούμε τώρα σε αδρές γραμμές ποια είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της επιστημονικής δραστηριότητας που αναπτύχθηκε στους κόλπους του

ισλαμικού πολιτισμού.



Ο Οίκος της σοφίας ιδρύθηκε στη Βαγδάτη κατά την περίοδο της βασιλείας του χαλίφη Αλ-Μαμούν (813-833), κατά το πρότυπο του Μουσείου της Αλεξάνδρειας. Στο ίδρυμα αυτό η μεταφραστική δραστηριότητα έφτασε στο ανώτατο σημείο της. (Αραβική εικόνα του 13ου αιώνα.)

Η αφύπνιση του ενδιαφέροντος για την επιστήμη στο πλαίσιο ενός δεδομένου πολιτισμού δεν νοείται χωρίς την απόκτηση ενός μέρους τουλάχιστον από την επιστημονική κληρονομιά των προηγούμενων πολιτισμών. Η αραβική επιστήμη δεν αποτελεί, φυσικά, εξαίρεση σε αυτό και επομένως μια σημαντική διάσταση της ιστορίας της είναι η **πρόσληψη της προγενέστερης επιστήμης**. Οι επιστημονικές παραδόσεις από τις οποίες άντλησαν οι Άραβες δεν είναι δύσκολο να αναγνωρισθούν. Πρώτα-πρώτα ήταν η ελληνική επιστήμη με όλους τους κλάδους της, πλάι σ' αυτή όμως πρέπει να προσθέσουμε την περσική αστρονομική παράδοση και επίσης την ινδική κληρονομιά τόσο στην αστρονομία όσο και στη λογιστική τέχνη (με βάση το δεκαδικό ψηφιακό αριθμητικό σύστημα). Όλες αυτές οι παραδόσεις, πάντως, δεν ήσαν τελείως ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ανήκαν στην ευρύτερη ελληνιστική επιστημονική παράδοση. Τα όρια και οι διακρίσεις, άλλωστε, μεταξύ των διαφόρων επιστημονικών παραδόσεων του ελληνιστικού κόσμου και του κόσμου της ύστερης αρχαιότητας, δεν είναι καθόλου ευδιάκριτα.

Η σημαντικότερη επιστημονική παράδοση από την οποία άντλησαν οι Άραβες, τόσο από ποιοτική όσο και από ποσοτική άποψη, ήταν η ελληνική. Ένας συγγραφέας μάλιστα έχει χαρακτηρίσει την αναβίωση της αρχαίας ελληνικής επιστήμης και φιλοσοφίας στο μεσαιωνικό Ισλάμ ως «την πρώτη αναγέννηση των ελληνικών γραμμάτων». Οι προϋποθέσεις και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες έγινε δυνατή αυτή η

> **Ο ΙΣΤΟΡΙΚΟΣ ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΡΑΒΙΚΩΝ ΜΕΤΑΦΡΑΣΕΩΝ**
>
> Ο ιστορικός ρόλος των αραβικών μεταφράσεων των αρχαίων ελληνικών επιστημονικών και φιλοσοφικών κειμένων είναι διττός: αφ' ενός, η αρχαιοελληνική επιστήμη και φιλοσοφία έγιναν γνωστές στην Ευρώπη, κατά τον όψιμο μεσαίωνα, δια μέσου, κυρίως, των αραβικών μεταφράσεων (όπως είδαμε στο παράδειγμα της μετάδοσης των *Στοιχείων* του Ευκλείδη)· αφ' ετέρου, οι αραβικές μεταφράσεις αποδείχθηκαν σημαντικές για τη γνώση ακόμη και αυτής της ίδιας της αρχαίας ελληνικής επιστήμης, αφού: 1) οι αραβικές μεταφράσεις, τις πιο πολλές φορές, βασίζονται σε ελληνικά ή σε συριακά αρχέτυπα που είναι παλαιότερα των αρχαιότερων σωζόμενων ελληνικών χειρογράφων (άρα είναι αξιόπιστες) και 2) δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις κειμένων που το ελληνικό πρωτότυπο έχει χαθεί και τα γνωρίζουμε σήμερα μόνο δια μέσου των αραβικών τους μεταφράσεων.

αναγέννηση παρουσιάζουν μεγάλο ιστοριογραφικό ενδιαφέρον και η νεότερη βιβλιογραφία που πραγματεύεται το θέμα είναι εκτενής και τροφοδοτείται συνεχώς από νέες μελέτες. Δύο βασικές πλευρές της διάδοσης της ελληνικής επιστήμης στο Ισλάμ θέλουμε να επισημάνουμε εδώ.

Η πρώτη είναι η «κινηματική» πλευρά της διάδοσης. Με τον όρο αυτό εννοούμε την απόκτηση ενός μεγάλου αριθμού σημαντικών επιστημονικών κειμένων και τη **«μεταφορά»** τους από το περιβάλλον παραγωγής τους σε ένα νέο περιβάλλον, το περιβάλλον υποδοχής. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της «μεταφοράς» στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι δεν επρόκειτο για γεωγραφική μεταφορά. Μερικά από τα πιο σημαντικά κέντρα του ελληνιστικού κόσμου στις βιβλιοθήκες των οποίων ήταν αποθηκευμένοι οι θησαυροί της αρχαίας ελληνικής επιστήμης και φιλοσοφίας (η Αλεξάνδρεια, η Αντιόχεια, τα σημαντικά μοναστήρια της Αιγύπτου, της Συρίας και του Ιράκ), αποτελούσαν μέρος ενός και του αυτού κόσμου, ο οποίος βαθμιαία περιερχόταν σε αραβική κυριαρχία. Η διάδοση, λοιπόν, έλαβε χώρα μέσα στους κόλπους ενός και του αυτού πληθυσμού, ο οποίος εξακολουθούσε να ζει στα ίδια εδάφη στα οποία ζούσε και παλιά και του οποίου αλλάζει η κουλτούρα, αφ' ενός με την επικράτηση μιας νέας θρησκείας και, αφ' ετέρου, με την έλευση μιας νέας γλώσσας η οποία αντικαθιστά μια άλλη γλώσσα. Η μετάδοση, επομένως, της ελληνικής επιστήμης στο Ισλάμ ήταν ουσιαστικά μια «γλωσσική» μεταφορά, είχε δηλαδή τον χαρακτήρα μιας μαζικής μεταφραστικής δραστηριότητας. Μέχρι το 1000 μ.Χ., γράφει ο ιστορικός της επιστήμης David Lindberg (Λίντμπεργκ) στο βιβλίο του *Οι απαρχές της δυτικής επιστήμης*, «το σύνολο σχεδόν των [σωζόμενων την εποχή εκείνη] έργων της ελληνικής ιατρικής, φυσικής φιλοσοφίας και μαθηματικής επιστήμης είχαν αποδοθεί σε εύχρηστες αραβικές εκδοχές».

Η μετάδοση της αρχαίας ελληνικής επιστήμης στο Ισλάμ δεν ήταν, όμως, μια παθητική διαδικασία πρόσληψης. Οι ιστορικοί της επιστήμης, σήμερα, τείνουν να υιοθετήσουν, αντί του όρου «πρόσληψη», τον όρο **«οικειοποίηση»**, προκειμένου να χαρακτηρίσουν το φαινόμενο. Ο όρος «οικειοποίηση» εκφράζει την υιοθέτηση από τους λογίους αυτούς της ελληνικής αντίληψης για τον κόσμο, τη γνώση, τις ηθικές αξίες και, ιδιαίτερα, για τη μεθοδολογία και το περιεχόμενο της επιστήμης. «Η ισλαμική επιστήμη», γράφει και πάλι ο Lindberg, «κτίστηκε ως επί το πλείστον σε ελληνικά θεμέλια και διαμορφώθηκε σύμφωνα με τις ελληνικές αρχιτεκτονικές αρχές· οι μουσουλμάνοι δεν προσπάθησαν να κατεδαφίσουν το ελληνικό οικοδόμημα και να κτίσουν εξαρχής, αλλά αφιέρωσαν τις δυνάμεις τους στην αποπεράτωσή του.» Κατά συνέπεια, **οι Άραβες είναι όχι απλώς κληρονόμοι αλλά συνεχιστές της αρχαίας ελληνικής επιστήμης**. Πρέπει να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι η πρόσληψη της ελληνικής επιστήμης από το Ισλάμ δεν πραγματοποιήθηκε μόνο με ατομικές πρωτοβουλίες του ενός ή του άλλου λογίου αλλά ήταν μια κατ' εξοχήν σκόπιμη και οργανωμένη δραστηριότητα των αράβων λογίων που καθοδηγήθηκε από Χαλίφες, αυλικούς αξιωματούχους, πλούσιους εμπόρους και μαικήνες, για να αποκτήσουν πρόσβαση στους καρπούς της αρχαίας ελληνικής και ελληνιστικής σκέψης, ιδίως στις γνώσεις εκείνες που ήσαν «χρήσιμες» τόσο για πρακτικούς όσο και για θεωρητικούς λόγους.

Η οικειοποίηση της αρχαίας ελληνικής και ελληνιστικής επιστήμης αποτελεί τη μία πλευρά του επιστημονικού φαινομένου που αναπτύχθηκε στους κόλπους του ισλαμικού πολιτισμού. Η δεύτερη πλευρά συνίσταται στην **παραγωγή πολλών πρωτότυπων αποτελεσμάτων** σε όλους σχεδόν τους τομείς. Ο χώρος δεν μας επιτρέπει να κάνουμε εδώ μια πλήρη καταγραφή των καινοτομιών αυτών, καθώς μόνο για την περίπτωση των μαθηματικών μια τέτοια καταγραφή θα έπρεπε να συμπεριλάβει την τελειοποίηση της αριθμητικής του ινδικής προελεύσεως δεκαδικού ψηφιακού θεσιακού συστήματος με την εισαγωγή σ' αυτό και των δεκαδικών αριθμών, τη δημιουργία μιας «ρητορικής» άλγεβρας (αντί της «συγκεκομμένης» άλγεβρας του Διοφάντου) που περιλαμβάνει την επίλυση και των εξισώσεων τρίτου βαθμού, σημαντικές ανακαλύψεις στην επίπεδη και σφαιρική τριγωνομετρία καθώς και τη συστηματοποίηση αυτών των επιστημών και, τέλος, την επινόηση τεχνικών για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. Θα αρκεστούμε, επομένως, να παρουσιάσουμε την πρωτότυπη συμβολή των Αράβων επιλέγοντας ενδεικτικά δύο επιστημονικά πεδία: την αστρονομία και την οπτική.

Η αστρονομία: Η ιστορία της αραβικής αστρονομίας αρχίζει με τη μετάφραση μιας ινδικής αστρονομικής πραγματείας (μιας *Σιδχάντα*) από τον αλ-Φαζάρι, γύρω στο 773, κατόπιν εντολής του Χαλίφη αλ-Μανσούρ. Η μετάφραση αυτή, που γνώρισε μεγάλη απήχηση υπό τον τίτλο *Zij al-Sindhind*, σηματοδοτεί την πρώιμη περίοδο



Εικόνα που δείχνει Άραβες αστρονόμους να εργάζονται σε ένα αστεροσκοπείο.

της αραβικής αστρονομίας η οποία χαρακτηρίζεται από ινδουιστικές επιδράσεις. Οι επιδράσεις αυτές όμως εξαφανίστηκαν στις αρχές του 9ου αι. όταν οι Άραβες αστρονόμοι απέκτησαν πρόσβαση στη *Μεγίστη* του Πτολεμαίου και στα άλλα έργα της ελληνικής αστρονομικής παράδοσης, τα οποία μετέφρασαν αμέσως στα αραβικά, πολλά απ' αυτά μάλιστα περισσότερες από μία φορές. Έκτοτε η αραβική αστρονομία αναπτύχθηκε κατά βάση σε πτολεμαϊκό πλαίσιο. Τα ελληνικά κείμενα μελετήθηκαν, σχολιάστηκαν και συνοψίστηκαν σε εύχρηστα εγχειρίδια. Οι Άραβες όμως δεν αρκέστηκαν σ' αυτά που κληρονόμησαν. Συνεισέφεραν και οι ίδιοι τόσο στην παρατηρησιακή όσο και στη θεωρητική (μαθηματική) αστρονομία. Σε ό,τι αφορά την παρατηρησιακή αστρονομία, κατόρθωσαν να βελτιώσουν τα όργανα παρατήρησης και να συντάσσουν συνεχώς νέους, ακριβέστερους πίνακες με τις συντεταγμένες των απλανών αστέρων και τις τιμές των διαφόρων παραμέτρων των πτολεμαϊκών μοντέλων (αστρικοί κατάλογοι). Οι παρατηρήσεις γίνονταν από αστεροσκοπεία τα οποία συχνά κτίζονταν με κύριο σκοπό τη σύνταξη νέων βελτιωμένων πινάκων, γι' αυτό ακριβώς και η ύπαρξή τους ήταν εφήμερη. Στη θεωρητική αστρονομία, εξάλλου, αξίζει μεταξύ άλλων να μνημονεύσουμε τους εξής: τον Τάμπιτ ιμπν Κούρα († 901), ο οποίος από τη μελέτη των φαινομένων κινήσεων του Ηλίου και της Σελήνης κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η μετάπτωση των ισημεριών είναι ανομοιόμορφη και διατύπωσε μια θεωρία για να εξηγήσει το φαινόμενο· τον αλ-Μπαττάνι († 929), ο οποίος ανακάλυψε την κίνηση της γραμμής των αψίδων του Ηλίου (δηλ. τη μεταβολή του περίγειου της ηλιακής τροχιάς) και υπολόγισε ακριβέστερα τη λό-

ξωση της εκλειπτικής· τέλος, δεν άφησε ασυγκίνητους τους αστρονόμους του Ισλάμ (κυρίως στην Ισπανία τον 12ο αι.) η παλιά γνωστή διαμάχη μεταξύ των οπαδών του Αριστοτέλη που πρέσβευαν τη φυσική ύπαρξη των ομόκεντρων σφαιρών και των οπαδών του Πτολεμαίου που ήσαν προσανατολισμένοι στη μαθηματική περιγραφή των πλανητικών κινήσεων.

Η οπτική: Η αρχαία κληρονομιά στην περιοχή της *Οπτικής*, εκτός από τα συγγράμματα του Αριστοτέλη, περιελάμβανε κυρίως τις ομώνυμες πραγματείες του Ευκλείδη και του Πτολεμαίου. Οι Άραβες συνέχισαν και εδώ το έργο των Αρχαίων Ελλήνων. Ιδιαίτερα οι εργασίες του Ιμπν αλ-Χαϊτάμ (περ. 965-1040), ο οποίος είναι περισσότερο γνωστός με την εκλατινισμένη μορφή του ονόματός του ως Αλχαζέν, αποτέλεσαν τη σημαντικότερη πηγή τόσο για τη μαθηματική όσο και για τη φυσιολογική οπτική, ως τον 17ο αιώνα. Τα επιτεύγματά του και στους δύο τομείς ήταν πολύ αξιόλογα. Υποστήριξε ότι η διάδοση του φωτός δεν είναι στιγμιαία και απέρριψε τη θεωρία της εκπομπής φωτεινών ακτίνων από το μάτι προς το αντικείμενο (θεωρία την οποία είχαν υποστηρίξει και μαθηματικοποιήσει ο Ευκλείδης και ο Πτολεμαίος) υπέρ της θεωρίας ότι το φως εκπέμπεται από το αντικείμενο προς το μάτι. Μελέτησε το φαινόμενο της διάθλασης και απέδειξε ότι η γωνία διάθλασης δεν είναι ανάλογη της γωνίας πρόσπτωσης, όπως λαθεμένα υποστήριζε ο Πτολεμαίος, ενώ μελέτησε επίσης τα σφαιρικά και παραβολικά κάτοπτρα και τους φακούς. Τέλος, σημαντικό ήταν το έργο του στη φυσιολογία και την ανατομία του ματιού, όπου όμως υποστήριζε λαθεμένα ότι οι φακοί είναι το ευαίσθητο μέρος του ματιού και ότι σ' αυτούς σχηματίζεται το είδωλο του αντικειμένου. Η άποψη αυτή εγκαταλείφθηκε τον 17ο αι. όταν ο Κέπλερ διατύπωσε τη θεωρία του ειδώλου του αμφιβληστροειδούς.

2.3 Ο ύστερος Μεσαίωνας στη λατινική Ευρώπη

Ο 12ος και ο 13ος αι. παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον για την ιστορία της επιστήμης στη λατινική Δύση. Η ιδεολογική, κοινωνική και πολιτική επικράτηση του Χριστιανισμού μοιραία οδήγησε σε μια ριζικά νέα θεώρηση του κόσμου και της φύσης, καθώς και των σχέσεων των ανθρώπων με το φυσικό περιβάλλον τους. Ο κόσμος και η φύση έπρεπε τώρα να ερμηνευθούν με έννοιες που δε θα ήταν αντίθετες με το περί της θεϊκής φύσης δόγμα του Χριστιανισμού. Λόγου χάρη, δε θα μπορούσε πια να γίνει δεκτή η ανυπαρξία κενού, που ο Αριστοτέλης με λογικά επιχειρήματα είχε αποδείξει, επειδή, απλούστατα - αφού ο Θεός ήταν παντοδύναμος - θα μπορούσε, αν επιθυμούσε, να δημιουργήσει το κενό. Τέτοιου είδους **θεολογικοί και φιλοσοφικοί στοχασμοί** έπαιξαν σημαντικό ρόλο (άλλοτε θετικό και άλλοτε αρνητικό) στην αποσαφήνιση εννοιών σχετικών με το φυσικό κόσμο.

Οι πρώτοι αιώνες του Μεσαίωνα σημαδεύονται από περίπλοκες πολιτικές, κοινωνικές και ιδεολογικές ανακατατάξεις. Αναμφισβήτητα, η πλήρης κυριαρχία του Χριστιανισμού στην Ευρώπη επηρεάζει το σύνολο της κοινωνικής ζωής. Η κυριαρχία αυτή, όμως, δεν ήταν μόνο ιδεολογική: ο Πάπας ενισχύει την πολιτική εξουσία του, αρχίζουν να σχηματίζονται ένοπλες δυνάμεις υπό τη διοίκηση της εκκλησίας, ενώ τα μοναστήρια αποκτούν βαθμιαία όλο και εντονότερη κοινωνική παρουσία. Η πολιτική αυτή κυριαρχία δεν ήταν, βέβαια, αποδεκτή από πολλούς βασιλείς, πρίγκιπες και φεουδάρχες. Τα Χριστούγεννα του έτους 800 μ.Χ. γίνεται από τον Πάπα η στέψη του Καρλομάγνου (Κάρολος Α΄ ο Μέγας, 742-814) ως αυτοκράτορα της Δύσης. Το γεγονός αυτό σηματοδοτεί για πολλούς ιστορικούς την αφετηρία της δημιουργίας μιας παράλληλης με τη θρησκευτική, κοσμικής εξουσίας. Βέβαια, ώσπου να αποσαφηνιστούν τα όρια της δικαιοδοσίας της καθεμιάς από τις δύο εξουσίες, χρειάστηκε να περάσουν πολλοί αιώνες, στη διάρκεια των οποίων ο κατά καιρούς ισχυρότερος μεταξύ των δύο προσπαθούσε, σε πρώτη ευκαιρία, να τα παραβιάσει.

Εξάλλου, από τα τέλη του 11ου αι. είχε αρχίσει, κυρίως στην Ισπανία, μια περίοδος έντονης **μεταφραστικής δραστηριότητας**. Μεταφράζονται από τα αραβικά στα λατινικά κείμενα της ελληνικής αρχαιότητας, καθώς και πρωτότυπα επιστημονικά κείμενα γραμμένα από Άραβες λογίους. Δια μέσου αυτών των μεταφράσεων οι λόγιοι της Ευρώπης αποκτούν, στη διάρκεια των επόμενων δύο αιώνων, μια ολοκληρωμένη εικόνα της αρχαίας ελληνικής επιστημονικής γραμματείας. Οι Ευρωπαίοι λόγιοι βρίσκουν στα ελληνικά κείμενα απαντήσεις σε πολλά από τα κοσμολογικά και τα φιλοσοφικά προβλήματα που τους απασχολούσαν και με εκτενείς σχολιασμούς αποσαφηνίζουν τις δύσκολες πλευρές των κειμένων.

2.3.1 Η δημιουργία των πρώτων ευρωπαϊκών πανεπιστημίων

Τα πανεπιστήμια άρχισαν να αποκτούν υπόσταση στη Δυτική Ευρώπη το 12ο αιώνα. Μπορούν να θεωρηθούν ως η μετεξέλιξη μερικών μοναστηριών, στα οποία οι μοναχοί ασχολούνταν συστηματικά με τα γράμματα. Στη διάρκεια του μετασχηματισμού τους βαθμιαία αυτονομήθηκαν από τους εκκλησιαστικούς μηχανισμούς. Ο E. Grant (Γκραντ), ένας από τους πιο σημαντικούς ιστορικούς της μεσαιωνικής επιστήμης, σημειώνει στο βιβλίο του *Οι φυσικές επιστήμες τον Μεσαίωνα* (1971): «Το πανεπιστήμιο ήταν το θεσμικό μέσο με το οποίο η Δυτική Ευρώπη θα οργάνωνε, θα απορροφούσε και θα επεξέτεινε τον μεγάλο όγκο της καινούργιας γνώσης, το εργαλείο μέσω του οποίου θα έπλαθε και θα διέδιδε μια κοινή διανοητική κληρονομιά για τις ερχόμενες γενιές».

Ήδη το έτος 1200 στα Πανεπιστήμια των Παρισίων και της Οξφόρδης ανθούσαν οι φιλοσοφικές



Μεσαιωνικό Πανεπιστήμιο.

σπουδές, ενώ στο Πανεπιστήμιο της Βολωνίας (Μπολόνια) ανθούσαν οι σπουδές στα νομικά και στην ιατρική. Οι φοιτητές ήσαν υποχρεωμένοι να παρακολουθούν ένα βασικό κύκλο μαθημάτων για να λάβουν πτυχίο νομικής, θεολογίας ή ιατρικής. Τα βασικά αυτά μαθήματα περιλάμβαναν τη λογική, την κοσμολογία, τα μαθηματικά και την αστρονομία. Ο πυρήνας της εκπαίδευσης των φοιτητών ήταν τα λογικά, επιστημονικά και φιλοσοφικά έργα του Αριστοτέλη, τα οποία είχαν πλέον αντικαταστήσει τη διδασκαλία της *τετρακτύος*, που ονομαζόταν πια *quadrivium* (αριθμητική, γεωμετρία, μουσική, αστρονομία), και συνιστούσε το πρόγραμμα σπουδών στη διάρκεια του πρώιμου Μεσαίωνα.

2.3.2 Φιλοσοφία και θεολογία

Πολλές από τις αραβικές μεταφράσεις έργων των Αρχαίων Ελλήνων που αποδόθηκαν στα λατινικά ήταν εμποτισμένες με τον προβληματισμό των Αράβων λογίων. Οι Άραβες λόγιοι πρόσθεσαν στη φιλοσοφία του Αριστοτέλη στοιχεία από το Ισλάμ. Ένα από τα πιο σημαντικά ήταν η άρνηση της ελευθερίας της βούλησης. Υπήρχαν, επίσης, απόψεις που υποστήριζαν ότι κάθε ανθρώπινη συμπεριφορά μπορεί να ερ-

μηνευθεί με την αστρολογία. Εδώ θα πρέπει να προστεθεί και η άποψη του Αριστοτέλη, ο οποίος δεν πίστευε στην αθανασία της ψυχής, άποψη η οποία μεταφέρθηκε αυτούσια στα αραβικά κείμενα. Το 12ο και 13ο αι. άρχισαν να διαφαίνονται με σαφήνεια εκείνα τα στοιχεία της αριστοτελικής φιλοσοφίας - όπως αυτή ήρθε στην Ευρώπη δια μέσου των Αράβων - που ήταν αντίθετα προς τη θεολογία της Δυτικής Εκκλησίας. Τα στοιχεία αυτά συνοψίζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Θέσεις της αριστοτελικής φιλοσοφίας	***Αντιθέσεις με τη θεολογία της Δυτικής Εκκλησίας***
Ο κόσμος είναι αιώνιος.	Ουσιαστικά αρνείται τη θέση που αναφέρεται στη δημιουργία του κόσμου από το Θεό.
Η ιδιότητα ενός σώματος δεν είναι δυνατόν να υπάρχει ανεξάρτητα από την υλική υπόστασή του.	Αντιτίθεται στο μυστήριο της Θείας Ευχαριστίας, σύμφωνα με το οποίο οι ιδιότητες του άρτου και του οίνου εξακολουθούν να υπάρχουν και μετά τη μετουσίωσή τους σε σώμα και αίμα του Χριστού.
Οι διαδικασίες της φύσης διέπονται από κανονικότητες που δεν αλλάζουν.	Αμφισβητεί τη δυνατότητα θαυμάτων.
Η ψυχή δεν επιβιώνει μετά το θάνατο του σώματος.	Αντιτίθεται στην αθανασία της ψυχής.

Οι αντιθέσεις φιλοσόφων και θεολόγων οξύνθηκαν ιδιαίτερα το δεύτερο μισό του 13ου αιώνα. Ήδη από το 1231 ο Πάπας Γρηγόριος ο Θ΄ ανακοινώνει ότι πρέπει να διαγραφούν τα λάθη από τα έργα του Αριστοτέλη και διορίζει μια επιτροπή, για να μελετήσει τα έργα και να εντοπίσει τα λάθη. Η επιτροπή δεν καταλήγει σε πόρισμα. Στο μεταξύ, στα Πανεπιστήμια των Παρισίων και της Τουλούζης είχε απαγορευθεί από εκκλησιαστικές συνόδους η διδασκαλία κάποιων τμημάτων από τα έργα του Αριστοτέλη. Σε άλλα πανεπιστήμια, όπως λ.χ. στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης, δεν υπήρξε παρόμοια απαγόρευση. Τέτοιου είδους απαγορεύσεις, επομένως, δεν ίσχυαν για όλα τα πανεπιστήμια, αλλά μόνο για εκείνα στα οποία δίδασκαν φιλόσοφοι οι οποίοι τόνιζαν τις διαφορετικές απόψεις μεταξύ φιλοσοφίας και θεολογίας με τρόπο συχνά προκλητικό για τους θεολόγους. Δεν ήταν λίγες οι φορές που πολλοί φιλόσοφοι στο Πανεπιστήμιο των Παρισίων έλεγαν δημόσια πως οι θεολογία είναι άχρηστη, πως βασίζεται σε μύθους και πως οι μόνοι σοφοί ήταν οι φιλόσοφοι!

Από το 1255 η απαγόρευση στο Πανεπιστήμιο των Παρισίων άρχισε βαθμιαία να εξασθενεί και τα έργα του Αριστοτέλη έγιναν και πάλι αντικείμενο μελέτης και συζήτησης. Το 1270, όμως, ο επίσκοπος των Παρισίων απαγορεύει τη διδασκαλία 13 προτάσεων του Αριστοτέλη και το 1272 οι καθηγητές του Πανεπιστημίου αναγκάζονται να ορκιστούν ότι δε θα τις διδάσκουν. Το 1277 ο Πάπας Ιωάννης ΚΑ΄ δίνει εντολή στον επίσκοπο των Παρισίων Etienne Tempier (Ετιέν Ταμπιέ) να διερευνήσει την κατάσταση. Μέσα σε τρεις εβδομάδες ο Tempier αποφασίζει πως 219 προτάσεις του ίδιου του Αριστοτέλη ή διαφόρων ερμηνευτών του (μεταξύ των οποίων και αυτές που αναφέρονται στον παραπάνω πίνακα), αποτελούν αιρετικές προτάσεις και η τιμωρία σε όσους συνέχιζαν να τις μελετούν και να τις διδάσκουν πρέπει να είναι ο αφορισμός. Η νίκη των θεολόγων έναντι των φιλοσόφων στη διαμάχη αυτή αποτέλεσε σοβαρό πλήγμα στην ελεύθερη διακίνηση των ιδεών.

2.3.3 Η θεωρία της κίνησης στον ύστερο Μεσαίωνα

Όπως έχουμε πει, σύμφωνα με τη θεωρία του Αριστοτέλη τα σώματα στη φύση είναι μείγματα των τεσσάρων στοιχείων - της γης, του αέρα, του νερού και της φωτιάς. Σε κάθε σώμα κυριαρχεί κάποιο από τα τέσσερα αυτά στοιχεία το οποίο και καθορίζει τη φυσική κίνησή του. Έτσι, κατά τον Αριστοτέλη, ένα σώμα πέφτει, επειδή στη σύνθεσή του κυριαρχεί ένα από τα βαρέα στοιχεία που το αποτελούν. Στη



Λατινική μετάφραση των φυσικών έργων του Αριστοτέλη από τον Γουλιέλμο του Μέρμπεκε κ.ά., με ελληνικά σχόλια στο περιθώριο. Χειρόγραφο του τέλους του 13ου ή των αρχών του 14ου αιώνα.

Στον Thomas Bradwardine (Μπρεϊντγουαρτάιν, † 1349) οφείλουμε ένα σημαντικό θεώρημα: εντός του κενού, δύο ομογενή σώματα (δηλαδή δύο σώματα από το ίδιο υλικό), διαφορετικού μεγέθους, θα πέφτουν προς τη γη με ίση ταχύτητα. Αυτό ισχύει, επειδή η ταχύτητα ενός σώματος προσδιορίζεται από τη σχετική αναλογία των στοιχείων. Αν, δηλαδή, σε ένα σώμα, η ποσοτική αναλογία βαρέων και ελαφρών στοιχείων είναι διπλάσια σε σχέση με κάποιο άλλο, τότε η αναλογία αυτή θα είναι η ίδια ανεξαρτήτως του μεγέθους του σώματος και, άρα, *ανεξαρτήτως του βάρους του*. Βλέπουμε, δηλαδή, πως σιγά σιγά αρχίζουν να γίνονται τα πρώτα βήματα, που θα οδηγήσουν ύστερα από 250 χρόνια στη διατύπωση του νόμου της ελεύθερης πτώσης από το Γαλιλαίο.

διάρκεια του 12ου και του 13ου αι. η ποιοτική αυτή περιγραφή της κίνησης ποσοτικοποιήθηκε. Αρκετοί λόγιοι πρότειναν τη θεωρία πως αυτό που οδηγεί, λ.χ., στην κίνηση προς τα κάτω είναι η ποσοτική αναλογία των βαρέων προς τα ελαφρά στοιχεία. Έτσι, μπορούσε να ερμηνευθεί όχι μόνο η κίνηση προς τα κάτω αλλά και η ταχύτερη πτώση ορισμένων σωμάτων σε σύγκριση με άλλα. Αν το ένα από δύο σώματα που πέφτουν προς τα κάτω φτάνει πιο γρήγορα στη γη, τότε η αναλογία βαρέων και ελαφρών στοιχείων στο σώμα αυτό θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αναλογία στο άλλο. Η ποσοτική αναλογία βαρέων και ελαφρών στοιχείων προσδιόριζε, λοιπόν, το ρυθμό της κίνησης κάθε σώματος. Με αυτό τον τρόπο μπορούσε να προσδιοριστεί η κίνηση τόσο ποιοτικά (προς τα κάτω ή προς τα πάνω) όσο και ποσοτικά (πόσο πιο γρήγορα προς τα κάτω ή πόσο πιο γρήγορα προς τα πάνω). Βέβαια, αυτό γινόταν μόνο συγκριτικά, ανάμεσα σε δύο η περισσότερα σώματα, και όχι με απόλυτο τρόπο.

3 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗΣ

Την περίοδο της Αναγέννησης συντελέστηκε μια ιστορική διαδικασία που θα μπορούσαμε να την περιγράψουμε ως «ανάκτηση της αρχαίας κληρονομιάς». Βασικό στοιχείο αυτής της διαδικασίας ήταν οι εκδόσεις των αρχαιοελληνικών επιστημονικών και φιλοσοφικών κειμένων και οι μεταφράσεις τους στα λατινικά απευθείας από το πρωτότυπο ελληνικό κείμενο χωρίς τη διαμεσολάβηση των αραβικών μεταφράσεων (όπως γινόταν κατά κανόνα στην περίοδο του ύστερου Μεσαίωνα). Σε ό,τι αφορά την ιστορία των μαθηματικών, αυτό το γεγονός αποτέλεσε τη βασική προϋπόθεση για τη ριζοσπαστική μεταλλαγή που γνώρισε η επιστήμη αυτή στα τέλη του 16ου και σε όλη τη διάρκεια του 17ου αι., αποτέλεσμα της οποίας ήταν η χειραφέτησή της από την αρχαία κληρονομιά και η είσοδός της στη νεότερη εποχή. Αν θα έπρεπε να συνοψίσουμε με λίγα λόγια τα πιο σημαντικά επεισόδια αυτής της μεταλ-

λαγής, θα σημειώναμε: α) τη δημιουργία της συμβολικής άλγεβρας και τη συνακόλουθη μετάβαση από το γεωμετρικό στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, και β) τη δημιουργία του απειροστικού λογισμού με τους δύο κλάδους του, το διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό.

3.1 Η ανάκτηση της αρχαίας κληρονομιάς

Η επιστημονική σκέψη στην Ευρώπη στα τέλη του 15ου και στο πρώτο μισό του 16ου αι. επηρεάζεται από την ανάκτηση της κλασικής (ελληνικής) επιστήμης και τη διάδοση των επιστημονικών γνώσεων σε ευρύτερα στρώματα του πληθυσμού (με την επέκταση της οργανωμένης εκπαίδευσης, την ένταξη των επιστημών σε όλες τις βαθμίδες της και με τη συγγραφή μεγάλου αριθμού εγχειριδίων, τα οποία αρχίζουν πια να συντάσσονται στις εθνικές γλώσσες και όχι μόνο στα λατινικά). Το ίδιο ισχύει και για τα μαθηματικά, τα οποία αρχίζουν να αποκτούν όλο και μεγαλύτερη σημασία στη συνείδηση των ανθρώπων της εποχής.

Το μέσο για την ανάκτηση της αρχαίας ελληνικής κληρονομιάς δεν μπορούσε να είναι άλλο από τις μεταφράσεις. Την περίοδο αυτή υλοποιείται ένα τεράστιο μεταφραστικό πρόγραμμα. Σ' αυτό το μεταφραστικό πρόγραμμα, που διευκολύνθηκε αφάνταστα από την ανακάλυψη της τυπογραφίας, πρωτοστατούν όχι πια ευρυμαθείς λόγιοι (όπως συνέβαινε παλαιότερα, το 12ο και το 13ο αι., με τους μεταφραστές των αραβικών κειμένων) αλλά οι ίδιοι οι μαθηματικοί. Εξάλλου, οι μεταφράσεις γίνονται πλέον από τα πρωτότυπα ελληνικά κείμενα. Από το πλήθος των μεταφραστών της εποχής περιοριζόμαστε να μνημονεύσουμε τους δύο πιο σημαντικούς: τον ελληνικής καταγωγής Francesco Maurolico (Φραγκίσκος Μαυρόλυκος, 1494-1575) και τον Federigo Commandino (Φρειδερίκος Κομμαντίνο, 1509-1575). Ως αποτέλεσμα των μεταφράσεων που εκπόνησαν κυρίως αυτοί οι δύο μεταφραστές, το σύνολο σχεδόν της αρχαίας ελληνικής επιστήμης έγινε πια κτήμα της επιστημονικής κοινότητας που άρχιζε σιγά σιγά να διαμορφώνεται.

3.2 Η δημιουργία της συμβολικής άλγεβρας

Ως τα τέλη του 16ου αι. η άλγεβρα εξακολουθούσε να αναπτύσσεται με κύριες κατευθύνσεις την επίλυση των εξισώσεων με αριθμητικούς συντελεστές ανωτέρου του δευτέρου βαθμού από τη μια πλευρά και τη μεταρρύθμιση του συμβολισμού από την άλλη. Το πιο σημαντικό επίτευγμα σε ό,τι αφορά την πρώτη κατεύθυνση, που σήμανε ταυτόχρονα και το απόγειο της «συγκεκομμένης άλγεβρας», ήταν η επίλυση των



François Viète (1540-1603).

τριτοβάθμιων και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων από τους Ιταλούς της σχολής της Βολωνίας Scipione del Ferro (Ντελ Φέρο, 1465-1526), Niccolo Tartaglia (Ταρτάλια, περ. 1500-1577), Gerolamo Cardano (Καρντάνο, 1501-1576) και Ludovico Ferrari (Φεράρι, 1522-1565). Το αποφασιστικό βήμα για τη δημιουργία του μοντέρνου αλγεβρικού συμβολισμού έγινε από το François Viète και ήταν απόρροια της άμεσης ενασχόλησής του με τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, ιδιαίτερα με τα έργα εκείνα στα οποία οι αρχαίοι χρησιμοποιούν τη **μέθοδο της ανάλυσης**.

Οι Αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν την ανάλυση ως **ευρετική μέθοδο**, για να επιλύουν αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα. Όμως, το αριθμητικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο μέσα στο οποίο λειτουργούσε η μέθοδος την εμπόδιζε να εμφανίζεται ευκρινής και καθαρή. Η καινοτόμος ιδέα του Viète ήταν, λοιπόν, να αποδεσμεύσει τη μέθοδο από τους αριθμούς και τα σχήματα στα οποία ήταν ενσωματωμένη από τους αρχαίους και να τη μελετήσει, έτσι, απογυμνωμένη από κάθε αριθμητικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο. Αυτό το πέτυχε με τη χρήση των γραμμάτων: η αναλυτική μέθοδος δεν εφαρμόζεται από το Viète σε αριθμούς ούτε σε γεωμετρικά σχήματα αλλά σε γράμματα του αλφαβήτου, δηλαδή σε *σύμβολα* που δεν έχουν κανένα αριθμητικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο. Με τον τρόπο αυτό ο Viète δημιούργησε μια ***γενική αναλυτική τέχνη***, την οποία ο ίδιος ονομάζει logistica speciosa [λογιστική επί των ειδών] και δεν είναι τίποτα άλλο από αυτό που ονομάζουμε σήμερα Άλγεβρα.

Ερωτήσεις

1) Από τον 3ο μ.Χ. αιώνα και μετά, όταν η ελληνική επιστήμη άρχισε βαθμιαία να παρακμάζει, αναδείχθηκε σε κύρια μορφή επιστημονικής δραστηριότητας η συγγραφή σχολίων στα κλασικά έργα του παρελθόντος. Να αναπτύξετε μερικούς βασικούς λόγους που οδήγησαν στην ανάπτυξη του σχολιαστικού κινήματος και να αναφέρετε τα ονόματα τριών (3) σχολιαστών που έζησαν την περίοδο αυτή.

2) Ο Γάλλος μαθηματικός του 18ου αι. J.-L. Lagrange (Λαγκράνζ, 1736-1813) είχε χαρακτηρίσει το Διόφαντο «πατέρα της άλγεβρας». Λαμβάνοντας υπόψη όσα αναφέρονται στις ενότητες 1.2 και 3.2 αυτού του κεφαλαίου, πώς θα σχολιάζατε αυτόν το χαρακτηρισμό;

3) Να περιγράψετε τις κύριες οδούς δια μέσου των οποίων μεταδόθηκε η αρχαία ελληνική επιστήμη στη λατινική Ευρώπη.

4) Αναφέρεται σήμερα από πολλούς ιστορικούς των επιστημών ότι οι Άραβες υπήρξαν στην επιστήμη μαθητές των Αρχαίων Ελλήνων. Πιστεύετε ότι αυτός ο χαρακτηρισμός είναι δίκαιος; Κατά τη γνώμη σας είναι υποτιμητικό να χαρακτηρίζεται κάποιος «μαθητής» ενός άλλου;

5) Να σχολιάσετε τη σχέση φιλοσοφίας και θεολογίας την περίοδο του Μεσαίωνα.

6) Με τις γνώσεις που έχετε αποκτήσει από την ιστορία των επιστημών αλλά και από όσα γνωρίζετε από την ιστορία γενικότερα, ποιες νομίζετε ότι είναι οι διαφορές ανάμεσα στα μεσαιωνικά και στα σημερινά πανεπιστήμια;

7) Όταν αποκαλούμε σήμερα κάποιον «σχολαστικό», τι εννοούμε; Αναζητήστε την ιστορία της λέξης αυτής και προσπαθήστε να καταλάβετε γιατί πήρε τη συγκεκριμένη σημασία στις μέρες μας. Κάποιος χαρακτηρισμός με περιεχόμενο αρχικά θετικό μπορεί με την πάροδο του χρόνου να αποκτήσει αρνητικό περιεχόμενο; Ισχύει μήπως και το αντίστροφο; Μπορείτε να βρείτε άλλα παραδείγματα;

8) Λέγεται συνήθως ότι το πείραμα όπως το ασκούμε σήμερα (ακριβής περιγραφή της διάταξης, ακριβείς μετρήσεις, ανάλυση των διαφορετικών παραγόντων που επηρεάζουν ένα φαινόμενο κτλ.) καθιερώθηκε το 16ο και το 17ο αιώνα. Αυτό είναι κατά βάση σωστό. Πολλές φορές, όμως, λέγεται πως ούτε στην αρχαιότητα αλλά ούτε και στο Μεσαίωνα υπήρχαν πειράματα. Τι θα είχατε να πείτε για τον ισχυρισμό αυτό; Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στην «παρατήρηση», στην «επίδειξη» και στο «πείραμα»; (*)